

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Krešimir Duvnjak**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Krešimir Duvnjak

Zagreb, 2016.

*Mojim roditeljima,  
Zdenki i Ivici*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studiranja na Fakultetu strojarstva i brodogradnje i navedenu literaturu.

Posebno zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu na savjetima, razumijevanju i vođenju pri izradi diplomskog rada. Također zahvaljujem i prof. dr. sc. Draženu Lončaru na savjetima i pomoći pri izradi projekta i tijekom studiranja. Rezultate i kvalitetne algoritme bi bilo puno teže dobiti bez velike pomoć Mije Tvrdojevića i njegovih savjeta i strpljenja kojim je prenosio svoje zavidno iskustvo. Zahvalan sam na pomoći strpljivim cimerima Alenu, Tomislavu i Martinu. Osim njih, puno je značilo imati kraj sebe prijatelje Antu, Božu i Mateja te sestru Ivanu.

Najveću zahvalu upućujem svojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje i čija mi je bezuvjetna potpora i strpljenje bila najveća motivacija tijekom studiranja.

Zagreb, ožujak 2016.

Krešimir Duvnjak



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Krešimir Duvnjak**

Mat. br.: 0035182209

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza i usporedba numeričkih metoda pri rješavanju biharmonijske jednadžbe**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis and Comparison of Numerical Methods for Solving Biharmonic Equation**

Opis zadatka:

Biharmonijska diferencijalna jednadžba je parcijalna, budući da je zavisna varijabla funkcija više varijabli. Također je linearna, jer zbroj rješenja dviju harmonijskih jednadžbi je rješenje zbroja istih. Prefiks *bi* označava da se radi o jednadžbi čiji je izvor također harmonijski.

U radu je potrebno provesti analizu i usporedbu numeričkih metoda pri rješavanju biharmonijske jednadžbe na primjeru savijanja tanke pravokutne ploče slobodno oslonjene po rubovima i opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem. Za zadani slučaj opterećenja i rubnih uvjeta savijanja tanke pravokutne ploče dostupno je analitičko i tablično rješenje, odrediti sve moguće veličine kod savijanja ploče. Potrebno je programirati vlastiti kod za numeričko rješavanje navedenog problema primjenom metode konačnih razlika, te metode konačnih elemenata, uz primjenu pravokutnih konačnih elemenata te variranje reda elementa. Također je potrebno dobivena rješenja usporediti s komercijalnim programskim paketom Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Za sve korištene metode ako je moguće prikazati i usporediti konvergenciju, točnost tj. preciznost (greška aproksimacije i konvergenciju elemenata) i efikasnost računanja.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

14. siječnja 2016.

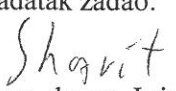
Rok predaje rada:

17. ožujka 2016.


Predviđeni datumi obrane:

23., 24. i 25. ožujka 2016.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Ilica Skozrit

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

# SADRŽAJ

<b>SADRŽAJ</b>	<b>iv</b>
<b>POPIS SLIKA</b>	<b>vi</b>
<b>POPIS TABLICA</b>	<b>viii</b>
<b>POPIS OZNAKA</b>	<b>ix</b>
<b>SAŽETAK</b>	<b>1</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>2</b>
<b>1. SAVIJANJE TANKIH PLOČA</b>	<b>3</b>
1.1. Izvod jednadžbe savijanja ploče . . . . .	4
1.1.1. Definiranje rubnih uvjeta . . . . .	7
<b>2. ANALITIČKO RJEŠENJE</b>	<b>9</b>
2.1. Rubni uvjeti . . . . .	11
2.2. Progib u točki A . . . . .	12
2.3. Tablično rješenje iz priručnika . . . . .	13
2.4. Komercijalni računalni paket . . . . .	14
<b>3. METODA KONAČNIH RAZLIKA</b>	<b>18</b>
3.1. Izvod shema diferencije . . . . .	18
3.2. Numeričko rješavanje . . . . .	20
3.3. Rezultati . . . . .	22
<b>4. METODA KONAČNIH ELEMENATA</b>	<b>29</b>
4.1. Uvod i motivacija . . . . .	29
4.2. Matematički model problema . . . . .	29
4.3. Varijacijski račun . . . . .	31

4.4. Rješenje Poissonove jednačbe . . . . .	32
4.5. Direktno rješenje biharmonijske jednačbe . . . . .	33
4.6. Funkcije oblika . . . . .	33
4.6.1. Osnovni jednodimenzijski pravokutni element . . . . .	34
4.6.2. Kvadratni jednodimenzijski pravokutni element . . . . .	35
4.6.3. Pločasti jednodimenzijski pravokutni element . . . . .	35
4.7. Numerička integracija . . . . .	37
4.8. Rezultati . . . . .	38
<b>5. USPOREDBA NUMERIČKIH METODA</b>	<b>41</b>
<b>6. ZAKLJUČAK</b>	<b>43</b>
<b>A. Dodatak - algoritmi</b>	<b>44</b>
A.1. Analitičko rješenje pomoću Fourierovih redova . . . . .	44
A.2. Rješavanje biharmonijske jednačbe dvostrukim rješavanjem Poissonove jednačbe, shemom drugog reda točnosti . . . . .	45
A.3. Rješavanje biharmonijske jednačbe direktnom diskretizacijom biharmonijske jednačbe, shemom drugog reda točnosti . . . . .	48
A.4. Rješavanje biharmonijske jednačbe dvostrukim rješavanjem Poissonove jednačbe, shemom četvrtog reda točnosti . . . . .	54
A.5. Rješavanje Poissonove jednačbe linearnim konačnim elementima . . . . .	58
A.6. Rješavanje Poissonove jednačbe pločastim konačnim elementima . . . . .	63
<b>B. Prilozi</b>	<b>70</b>
B.1. CD-R disk . . . . .	70

# POPIS SLIKA

1.1	Kinematička analiza diferencijalnog elementa ploče [1] . . . . .	4
1.2	Ravnoteža sila na diferencijalni element ploče . . . . .	7
1.3	Zglobno oslonjena pravokutna ploča . . . . .	8
2.1	Tablica iz inženjerskog priručnika [9] . . . . .	13
2.2	Definiranje geometrije . . . . .	14
2.3	Zadavanje svojstva elastičnog materijala (čelik) . . . . .	15
2.4	Postavljanje presjeka modela . . . . .	15
2.5	Linearno područje proračuna . . . . .	16
2.6	Kontinuirano opterećenje $q_0 = 0,01 \text{ N/mm}^2$ . . . . .	16
2.7	Rubni uvjet pomaka . . . . .	17
2.8	Postavke mreže . . . . .	17
2.9	Konačno rješenje . . . . .	17
3.1	Definicija derivacije . . . . .	19
3.2	Aproksimacije derivacije . . . . .	20
3.3	Šablona diskretizacije Poissonove jednadžbe . . . . .	23
3.4	Šablona direktne diskretizacije biharmonijske jednadžbe . . . . .	23
3.5	Usporedba grešaka za različite metode . . . . .	24
3.6	Usporedba brzine konvergencije metoda . . . . .	25
3.7	Progib: $w = 0,7149 \text{ mm}$ ( $5 \times 5$ ) . . . . .	25
3.8	Progib: $w = 0,5391 \text{ mm}$ ( $8 \times 8$ ) . . . . .	26
3.9	Progib: $w = 0,4971 \text{ mm}$ ( $8 \times 8$ ) . . . . .	26
3.10	Progib: $w = 0,4473 \text{ mm}$ ( $10 \times 10$ ) . . . . .	26
3.11	Progib: $w = 0,4181 \text{ mm}$ ( $20 \times 20$ ) . . . . .	27
3.12	Progib: $w = 0,3932 \text{ mm}$ ( $30 \times 30$ ) . . . . .	27



3.13	Progib: $w = 0,3738$ mm ( $50 \times 50$ ) . . . . .	27
3.14	Progib: $w = 0,359$ mm ( $100 \times 100$ ) . . . . .	28
3.15	Progib: $w = 0,3484$ mm ( $500 \times 500$ ) . . . . .	28
4.1	Funkcija oblika za progib u čvoru . . . . .	35
4.2	Funkcija oblika za zakret u čvoru . . . . .	36
4.3	Funkcija oblika za zakret u čvoru . . . . .	36
4.4	Funkcija oblika za miješanu derivaciju . . . . .	36
4.5	Skica pločastog elementa . . . . .	37
4.6	Usporedba konvergencije rješenja konačnih elemenata . . . . .	38
4.7	Progib: $w = 0,3504$ mm (8 elemenata) . . . . .	39
4.8	Progib: $w = 0,34701$ mm (16 elemenata) . . . . .	39
4.9	Progib: $w = 0,34595$ mm (24 elemenata) . . . . .	39
4.10	Progib: $w = 0,34569$ mm (48 elemenata) . . . . .	40
4.11	Progib: $w = 0,345653$ mm (100 elemenata) . . . . .	40
4.12	Progib: $w = 0,34564$ mm (200 elemenata) . . . . .	40
5.1	Usporedba konvergencije metoda . . . . .	41

# POPIS TABLICA

1.1	Tablica zadanih parametara ploče . . . . .	8
3.1	Tablica progiba dobivenih MKR metodom . . . . .	24
4.1	Tablica progiba dobivenih MKE metodom . . . . .	38

## POPIS OZNAKA

$\alpha_x$	Zakret ploče oko $x$ osi, [rad]
$\alpha_y$	Zakret ploče oko $y$ osi, [rad]
$\varepsilon_x$	Deformacija u smjeru $x$ osi
$\varepsilon_y$	Deformacija u smjeru $y$ osi
$\varepsilon_z$	Deformacija u smjeru $z$ osi
$\nu$	Poissonov faktor
$D$	Fleksijska krutost, [mm]
$\gamma_{xy}$	Kutna deformacija u $xy$ ravnini
$\gamma_{xz}$	Kutna deformacija u $xz$ ravnini
$\gamma_{yz}$	Kutna deformacija u $yz$ ravnini
$h$	Debljina ploče, [mm]
$\kappa_x$	Zakrivljenost u smjeru $x$ osi
$\kappa_z$	Zakrivljenost u smjeru $z$ osi
$\kappa_y$	Zakrivljenost u smjeru $y$ osi
$L_{\max}$	Duljina dulje strane ploče, [mm]
$L_{\min}$	Duljina kraće strane ploče, [mm]
$L_x$	Duljina ploče u smjeru $x$ -osi, [mm]
$L_y$	Duljina ploče u smjeru $y$ -osi, [mm]
$M$	Moment, [Nmm]
$M_x$	Moment oko osi $x$ , [Nmm]
$M_{xy}$	Unutarnji moment uvijanja, [Nmm]
$M_y$	Moment oko osi $y$ , [Nmm]
$Q_{xz}$	Posmična sila u $xz$ ravnini, [N]
$Q_{yz}$	Posmična sila u $yz$ ravnini, [N]
$q_z$	Kontinuirana distribucija opterećenja u smjeru $z$ -osi
$\sigma_x$	Naprezanje u smjeru $x$ osi, [MPa]
$\sigma_y$	Naprezanje u smjeru $y$ osi, [MPa]

$\tau_{xy}$	Posmično naprezanje u $xy$ ravnini, [MPa]
$u$	Pomak u smjeru $x$ osi, [mm]
$v$	Pomak u smjeru $y$ osi, [mm]
$w$	Pomak u smjeru $z$ osi, progib, [mm]
$w_{\text{[max]}}$	Maksimalni progib ploče, [mm]
$E$	Youngov modul, modul elastičnosti, [GPa]

# SAŽETAK

U inženjerskoj praksi se često nailazi na probleme koji zahtjevaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi (PDJ), što je često vrlo složeno ili nemoguće bez približnih rješenja. Jedne od najraširenijih metoda u inženjerskoj i znanstvenoj praksi su metoda konačnih elemenata i metoda konačnih razlika. Za procjenu takvih rješenja je potrebno puno iskustva, i često zahtjevaju dodatne provjere. Da bi se rezultat dobiven tim metodama mogao provjeriti, može se zadati slučaj za koje je poznato analitičko rješenje. Čak i zadan slučaj u ovom radu, savijanje tanke pravokutne ploče, geometrijski vrlo jednostavna, zahtjeva veće iskustvo s matematičkom analizom. Korištenje komercijalnih računalnih paketa je daleko najpraktičniji način dolaska do rješenja. Ali, iako on može računati proizvoljno komplicirane geometrije, potrebno je poznavati mehanizme računanja PDJ implementiranih u softveru da bi se moglo pouzdano ocijeniti rješenje. Osim toga, licence tih softvera su preskupe da si ih inženjeri mogu pojedinačno priuštiti. Alternativa je u korištenju *open-source* alata, koji su inženjerima pristupačni i dovoljno pouzdani. Njihovo korištenje je besplatno i zahtjeva samo razumijevanje implementacije.

Doprinos ovog rada je rješavanje biharmonijske jednačbe koja opisuje savijanje ploča, pomoću više različitih pristupa i metoda, te pisanje vlastitog algoritma i usporedba konačnih rezultata. Postavljene su jednačbe iz teorije tankih ploča kojima se dobiva funkcija progiba te je pokazano dobivanje analitičkog rješenja, čiji je rezultat uzet kao referentan za zadani problem. Osim toga je pokazan i postupak dobivanja progiba za ploču pomoću računalnog paketa Abaqus i dodatno uspoređen s tabličnim vrijednostima iz Inženjerskog priručnika. Pristup rješavanjem konačnim razlikama je prikazan uz malo uvodne teorije. Za metodu konačnih elemenata je približena apstraktna matematička teorija te prikazano rješenje dobiveno dvama različitim elementima. Te dvije numeričke metode su uspoređene, na temelju čega je pružen zaključak. Kao dodatak su ostavljeni algoritmi te korištena stručna literatura.

**Ključne riječi:** biharmonijska jednačba, parcijalne diferencijalne jednačbe, numeričke metode, teorija savijanja tankih ploča, Poissonova jednačba, Fourierovi redovi

# SUMMARY

Finding solution to partial differential equation (PDE) is common task for an engineer, for whom it is often too complex to find its exact solution. Sometimes one can only find an approximate solution. Some of the most popular numerical methods for finding such solutions are the method of finite differences (MFD) and the method of finite elements (FEM). In order to estimate and compare methods, one can take any case for which analytic formula is known. Even the case described in this thesis, which is pretty simple, a thin rectangular plate, requires advanced mathematical skills. The simplest way would be to use commercial engineering software. That kind of software is perfect for complex geometries, but requires knowledge in PDE methods that are implemented in solvers. Moreover, an average engineer can hardly afford official licenses for them. Alternative lies in usage of open-source tools, which are free and can be easily used with enough time spent tackling user-non-friendly environment. Contribution of this thesis is solving biharmonic equation, governing thin plate bending, using various methods and approaches, including writing own algorithm and comparing the results. In order to provide analytic solution for thin plate bending governing equation, plate theory has been analyzed. Calculated result has been taken as reference in the entire thesis. Moreover, Abaqus workflow for obtaining solution has also been provided. The result was additionally compared to the table data from Engineer's handbook. The method of finite differences, besides given results, is described with a chunk of theory. The method of finite elements is introduced through some abstract mathematical theory at first and then empowered with results. Both those numeric methods have been compared and commented. As an addition, solver algorithms were transcribed, along with used academic literature.

**Keywords:** biharmonic equation, partial differential equations, numeric methods, thin plate bending, Kirchhoff-Love, Poisson equation, Fourier series

# 1. SAVIJANJE TANKIH PLOČA

Pločom se smatra kontinuum omeđen dvjema plohama čija je međusobna udaljenost mala u odnosu na ostale dimenzije koje su dominantno veće. Da bi analiza savijanja ploča bila primjenjiva u praksi i dostupna inženjerskoj primjeni, morale su biti uvede određene pretpostavke. Te pretpostavke bi odgovarale nekim specijalnim slučajevima, ali bi osim tih uskih područja bile neprimjenjive. To je dovelo do više različitih teorija, svaka sa svojim područjem primjene.

Jedne od prvih teorija savijanja su postavili Da Vinci i Galileo, no oni nisu poznavali diferencijalni račun, ni Hookeov zakon. Jacob Bernouli je prvi postavio prave temelje, na temelju kojih su Daniel Bernouli i Leonhard Euler postavili svoju teoriju savijanja. U to vrijeme (cca 1750.) su znanost i tehnika bili odvojena područja. Zbog toga je njihova teorija, savijanje u linearnom području, prihvaćena u znanstvenoj zajednici krajem devetnaestog stoljeća, tek nakon izgradnje Eiffelovog tornja (cca 1890.). Pretpostavke za te grede podrazumijevaju da se radi o tankim gredama kojima su deformacije male. Nedugo zatim je pretpostavku o tankim gredama, i okomitosti normale na elastičnu liniju napustio Timoshenko. Timoshenkova teorija savijanja greda uzima u obzir i posmična naprezanja po okomitoj osi na srednju liniju i zove se teorija savijanja debelih greda. Analogno gredama, navedene teorije se mogu proširiti na dvije dimenzije, tj. na ploče. Teorija savijanja tankih ploča sa sličnim pretpostavkama kao Euler-Bernoulijeva greda se naziva Kirchhoff-Loveova teorija, dok se teorija savijanja debelih ploča koja uzima i posmična naprezanja naziva Mindlin-Reissnerova. U okviru ovog rada se proučava samo Kirchhoff-Loveova teorija tankih ploča. Više o ovim teorijama i analizi čvrstoće se može naći u [1] i [8].

Pretpostavke u Kirchhoff-Loveovoj teoriji, koja se naziva i klasična teorija ploča su:

- debljina je mala u odnosu na ostale dimenzije i ne mijenja se pri deformaciji, otprilike  $h/l_{\min} < 1/20$ ,
- progib ploče mali je u usporedbi s debljinom, otprilike  $w_{\max}/h = 1/5$ , a nagib deformirane srednje plohe mali je u odnosu na jedinicu,
- nakon deformiranja normale na srednju plohu, ostaju ravne i okomite uz nepromijenjenu

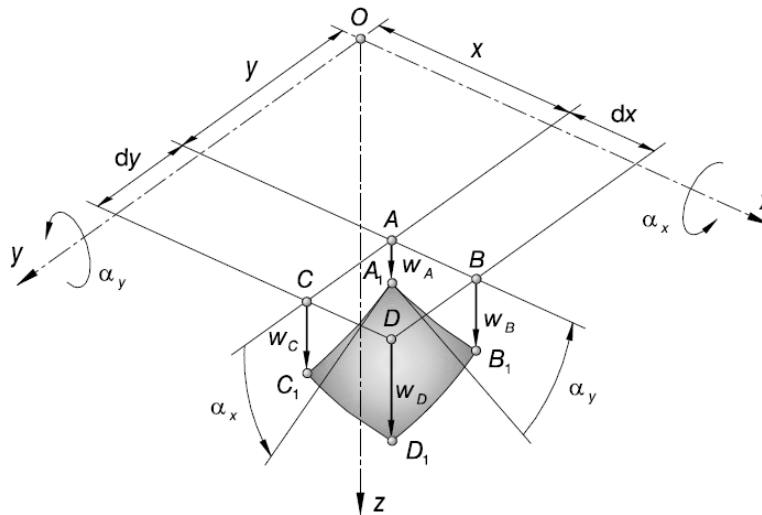
duljinu,

- deformacija u ravnini srednje plohe jednaka je nuli,
- materijal je linearno elastičan, homogen i izotropan.

Postoji srednja ravnina u kojoj ne vlada naprezanje, te ako u njoj djeluje opterećenje, u ploči vlada ravninsko stanje naprezanja. Veličina  $h$  predstavlja debljinu ploče, koja prema prvoj pretpostavci treba biti dvadeset puta manja od manje od dviju preostalih dimenzija  $l_{\min}$ .

## 1.1. Izvod jednadžbe savijanja ploče

Iz slike, 1.1, preuzete iz [1], vidljive su sve veličine potrebne za kinematičku analizu diferencijalnog elementa:



Slika 1.1: Kinematička analiza diferencijalnog elementa ploče [1]

Kutni zakreti,  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  uslijed savijanja oko  $x$  i  $y$  osi se dobiva kao derivacije progiba  $w$ :

$$\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1.1)$$

$$\alpha_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Budući da se ovdje obrađuje linearna teorija, može se reći da su pomaci u smjeru osi  $u = u(x)$ ,  $v = v(y)$  jednaki:

$$u = z\alpha_y, \quad v = -z\alpha_x. \quad (1.3)$$



U ove jednadžbe se može uvrstiti (1.1), pa se dobiva:

$$u = z\alpha_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = z\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Daljnjoj kinematičkom analizom ploče dobivamo funkcije deformacija:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (1.9)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

Prva prostorna derivacija funkcije je brzina prirasta i predstavlja zakret. Prema tome, druga derivacija u prostoru je brzina prirasta zakreta, odnosno veličina koja se u diferencijalnoj geometriji zove *zakrivljenost* mnogostrukosti i označava s  $\kappa$ . Indeks uz oznaku  $\kappa$  označava os oko koje je geometrija zakrivljena.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.11)$$

Hookeov zakon povezuje kinematičke veličine s naprezanjima  $\sigma$ , gdje je indeks oznaka za os u smjeru koje djeluje vektor naprezanja. Za ravninski, dvodimenzijski slučaj imamo:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (1.12)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (1.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \quad (1.14)$$

U ove izraze se uvrštavanjem (1.5)-(1.10) dobiva:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (1.16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.17)$$

Unutarnje sile koje djeluju na diferencijalni element:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz, \quad (1.18)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz, \quad (1.19)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz, \quad (1.20)$$

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz, \quad (1.21)$$

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz, \quad (1.22)$$

gdje je  $M$  moment savijanja oko osi, navedenih u indeksu i  $Q$  poprečna sila, čiji prvi indeks označava smjer normale plohe, a drugi indeks smjer djelovanja vektora. Uvrštavanjem u izraze, od (1.18) do (1.22), kinematičke izraze te nakon integriranja, dobiva se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad (1.23)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad (1.24)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1 - \nu) \kappa_{xy}. \quad (1.25)$$

Veličina  $D$  predstavlja fleksijsku krutost ploče. Za područje linearne analize, ona je konstantna:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (1.26)$$

Na slici 1.2, uzetoj iz [1], su prikazane sile koje djeluju na diferencijalni element ploče. Postavljanjem jednadžbi ravnoteže momenta i raspisivanjem se dobiva:

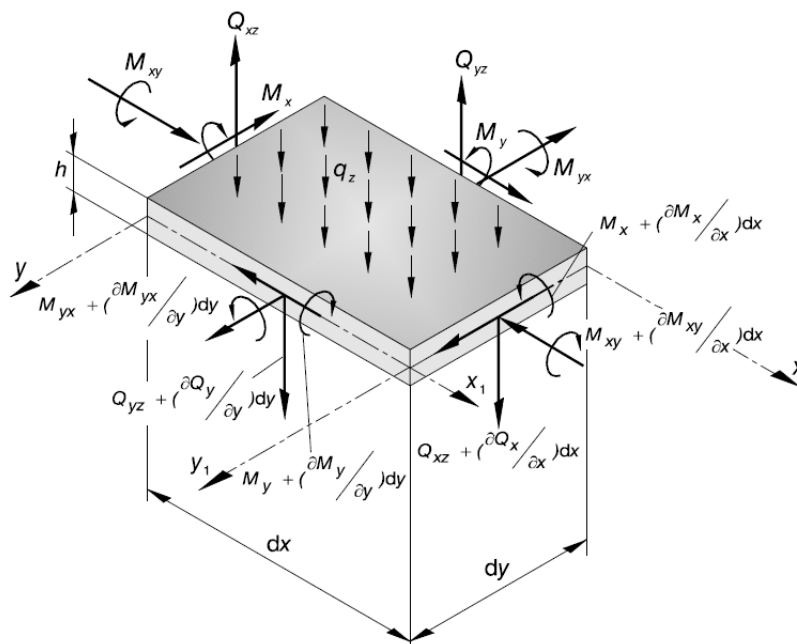
$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q_z = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0. \quad (1.29)$$

Uvrštavanjem (1.23) u jednadžbe ravnoteže sila (1.27), dobiva se relacija:

$$D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = q_z. \quad (1.30)$$



Slika 1.2: Ravnoteža sila na diferencijalni element ploče

Daljnje raspisivanje ove jednačbe se dobiva sažetiji zapis:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q_z. \quad (1.31)$$

Ova jednačba je diferencijalna jednačba savijanja ploče. Ona je linearna nehomogena parcijalna diferencijalna jednačba 4. reda. Njen naziv je i **nehomogena biharmonijska jednačba**.

### 1.1.1. Definiranje rubnih uvjeta

Moguća su četiri slučaja rubnih uvjeta.

- Uklješten rub (pr.  $x = L_x$ )

$$w(L_x, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(L_x, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(L_x, y) = 0.$$

- Zglobno oslonjen rub (pr.  $x = L_x$ ).

$$w(L_x, y) = 0,$$

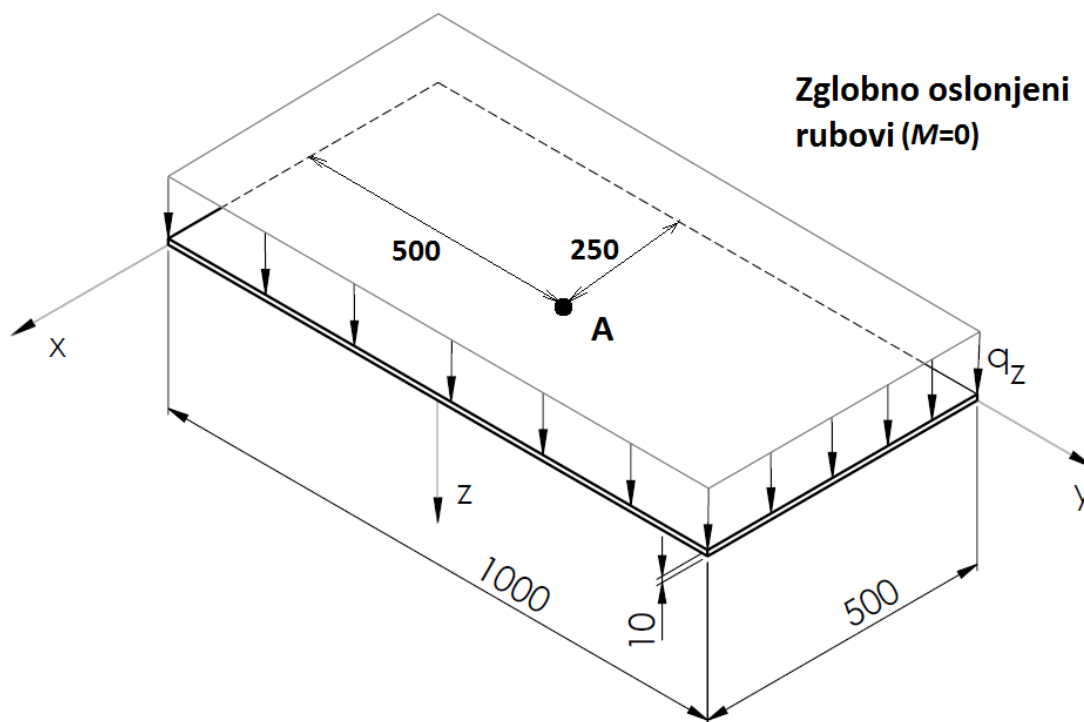
- Uklješten rub ( $M \neq 0$ ,  $w = 0$ ).

- Oslanjanje na stup (točkasti oslonac).

U okviru ovog rada će se proračunavati progib u točki A pravokutne ploče čije su dimenzije i karakteristike materijala prikazane u tablici 1.1. Takva ploča zadovoljava pretpostavke o tankoj ploči pa se na nju može primijeniti predstavljena teorija. Opterećenje je uniformno i iznosi  $q_z = 0,01\text{N/mm}^2$ . Ploča je zglobno oslonjena na rubovima. Točka A se nalazi na sredini ploče,  $A(L_x/2, L_y/2)$ .

Tablica 1.1: Tablica zadanih parametara ploče

duljina $L_x/\text{mm}$	širina $L_y/\text{mm}$	debljina $h/\text{mm}$	Poissonov faktor $\nu$	Opterećenje $q_z/\text{MPa}$	Youngov modul $E/\text{GPa}$
1000	500	10	0,3	0,01	200



Slika 1.3: Zglobno oslonjena pravokutna ploča

## 2. ANALITIČKO RJEŠENJE

Jednadžba koja opisuje fenomen savijanja tankih ploča je linearna (eliptička) parcijalna diferencijalna jednažba. One nemaju univerzalno rješenje, ali je uz određene rubne uvjete moguće naći analitičko rješenje. Za odabrane rubne uvjete postoji analitičko rješenje. Jedan od pristupa računanja funkcije progiba je preko dvostrukih trigonometrijskih redova. Početna jednadžba je biharmonijska, prema (1.31):

$$\Delta^2 w = \frac{q_z(x, y)}{D}. \quad (2.1)$$

Opterećenje je uniformno na cijeloj domeni i iz Tablica 1.1 iznosi  $q_z = 0,01 \text{ N/mm}^2$ . Navierov pristup je aproksimacija funkcija dvostrukim Fourierovim redovima. Funkcija opterećenja se preko sume trigonometrijskih redova prikazuje kao:

$$q_z(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q^j j k_z \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.2)$$

Koeficijent  $q_z^{jk}$  predstavlja Fourierov koeficijent za opterećenje koje se odnosi na član (j,k). Slično tome se i funkcija  $w$  progiba prikazuje kao:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.3)$$

Prema formuli (1.31) biharmonijsku jednadžbu pišemo:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (2.4)$$

U taj izraz treba uvrstiti (2.3) i derivirati do četvrte derivacije:

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z (\cos j\pi \frac{x}{a}) \frac{j\pi}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z (-\sin j\pi \frac{x}{a}) \frac{j\pi}{a} \frac{j\pi}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z (-\cos j\pi \frac{x}{a}) \frac{j\pi}{a} \frac{j\pi}{a} \frac{j\pi}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z \sin j\pi \frac{x}{a} \left( \frac{j\pi}{a} \right)^4 \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.8)$$

Da se dobije miješani član potrebno je drugu derivaciju dodatno derivirati dva puta po  $y$  varijabli:

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z \left( -\sin j\pi \frac{x}{a} \right) \left( \frac{j\pi}{a} \right)^2 \left( -\sin k\pi \frac{y}{b} \right) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2. \quad (2.9)$$

Analogno postupku deriviranja po  $x$  varijabli (2.5), provodimo deriviranje po  $y$  varijabli četiri puta da dobijemo treći član iz (2.4):

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^j j k_z \sin j\pi \frac{x}{a} \left( \sin k\pi \frac{y}{b} \right) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4. \quad (2.10)$$

Sada se može raspisati funkcija (2.4):

$$\begin{aligned} \nabla^4 = & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^{jk} \sin j\pi \frac{x}{a} \left( \frac{j\pi}{a} \right)^4 \sin k\pi \frac{y}{b} + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_z^{jk} \left( -\sin j\pi \frac{x}{a} \right) \left( \frac{j\pi}{a} \right)^2 \left( -\sin k\pi \frac{y}{b} \right) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_z^{jk} \sin j\pi \frac{x}{a} \left( \sin k\pi \frac{y}{b} \right) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Iz (2.11) se mogu grupirati sinus funkcije i zatim izlučiti i grupirati polinome faktora:

$$\nabla^4 w = \pi^4 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2 w^{jk} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.12)$$

Ovu funkciju za progib možemo uvrstiti uz (2.2) u (2.1):

$$\pi^4 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2 w^{jk} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_z^{jk}}{D} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.13)$$

Slijedi da je za odgovarajući  $j$  i  $k$ :

$$\pi^4 \left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2 w^{jk} = \frac{q_z^{jk}}{D}. \quad (2.14)$$

U ovoj jednadžbi je potrebno još odrediti koeficijente  $q_z^{jk}$ . Poznato je iz Fourierove analize da je potrebno pomnožiti lijevu i desnu stranu izraza (2.2) sa  $\sin(m\pi y/b)dy$  i integrirati od 0 do  $b$ .

$$\int_0^b q_z(x, y) \sin m\pi \frac{y}{b} dy = q_z^{jk} \sin j\pi \frac{x}{a} \int_0^b \sin k\pi \frac{y}{b} \sin m\pi \frac{y}{b} dy. \quad (2.15)$$

Kada je  $m \neq k$  izraz (2.15) iščezava. Dok u slučaju da je  $m = k$ , slijedi:

$$\int_0^b \sin^2 k\pi \frac{y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (2.16)$$

Jednako tako je potrebno pomnožiti obe strane izraza (2.2) sa  $\sin(l\pi x/a) dx$  i provesti integriranje od 0 do  $a$ :

$$\int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin k\pi \frac{y}{b} dy \sin l\pi \frac{x}{a} dx dy = \frac{b}{2} q_z^{jk} \int_0^b \sin j\pi \frac{y}{b} \sin l\pi \frac{y}{b} dy. \quad (2.17)$$

Za  $l \neq j$  izraz (2.17) je jednak nuli. Za  $l = j$  slijedi:

$$\int_0^a \sin^2 j\pi \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2}. \quad (2.18)$$

Taj rezultat se može uvrstiti u (2.17), pa se dobiva:

$$\int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} q_z^{jk}. \quad (2.19)$$

Konačno, Fourierov koeficijent opterećenja dobivamo dvostrukim integriranjem:

$$q_z^{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (2.20)$$

Pomoću tog izraza se može pojednostaviti (2.14):

$$w^{jk} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{q_z^{jk}}{\left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (2.21)$$

Konačno se dobiva izraz za progib koji je funkcija samo koordinata  $x$  i  $y$ :

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_z^{jk}}{\left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.22)$$

## 2.1. Rubni uvjeti

Slobodno oslonjena ploča ima na cijelom rubu domene progib i moment jednak nuli:

$$w(\partial\Omega) = 0, \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.23)$$

Na rubu  $\bar{x}$ , nema prirasta u smjeru  $y$ , jer je oslonac konstantan. Pa prema (2.23)  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ . Jednako tako je i na  $\bar{y}$  rubu progib jednak nuli i slijedi da je  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ . Zaključuje se da vrijedi :

$$\frac{\partial^2 w}{x^2} + \frac{\partial^2 w}{y^2} = \nabla^2 w. \quad (2.24)$$

Kraće se može zapisati :

$$w = 0, \quad \nabla^2 w = 0. \quad (2.25)$$

## 2.2. Progib u točki A

Budući da je u ovom radu zadano opterećenje uniformno distribuirano, Fourierove koeficijente dobivamo kao:

$$q_z(x, y) = q_0$$

$$q_z^{jk} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (2.26)$$

Nakon integriranja (2.26) koeficijent  $q_z^{jk}$  je jednak:

$$q_z^{jk} = 16q_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi j}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 j k} \quad (2.27)$$

Uvrštavajući tu funkciju u izraz (2.22), dobiva se funkcija progiba.

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 j\pi \frac{x}{2} \sin^2 k\pi \frac{y}{2}}{jk \left[ \left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 \right]^2} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}. \quad (2.28)$$

Za zadane koordinate točke A  $x = Lx/2 = 500$ ;  $y = Ly/2 = 250$ , dobiva se progib :

$$w(Lx/2, Ly/2) = 0,3456 \text{ mm} \quad (2.29)$$

Ovo rješenje je analitičko i egzaktno, i već nakon petnaestak pribrojnika se dobiva rješenje na navedenoj preciznosti. U dodatku je ispisan algoritam kod kojim se dobiva rješenje. U slijedećim poglavljima su prikazani alternativni načini dolaska do ovog rješenja te usporedba i procjena preciznosti.



### 2.3. Tablično rješenje iz priručnika

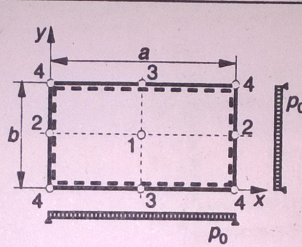
Na slici 2.1, preuzetoj iz Inženjerskog priručnika [9], se nalazi tablica iz poglavlja savijanja tankih pravokutnih ploča. U njoj se nalaze podaci za progib *srednje točke*  $w(L_x/2, L_y/2) = w_1$ . Dimenzije ploče iz rada su  $1000 \times 500$ , što odgovara omjeru  $a/b = 2$ . Očitana vrijednost normiranog progiba:

$$w_1 / \frac{p_0 a^4}{E h^3} = -0,0069. \quad (2.30)$$

Oznaka  $p_0$  je oznaka kontinuiranog opterećenja, koje je u radu označavano sa  $q_0$ , i iznosi:  $q_0 = 0,01 \text{ N/mm}^2$ . Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti za  $a = L_x = 1000 \text{ mm}$ ,  $E =$

SILE, MOMENTI I POMACI ZA SLOBODNO OŠLONJENE PRAVOKUTNE PLOČE OPTEREĆENE KONSTANTNIM POVRŠINSKIM OPTEREĆENJEM

$\nu = 0,30$



$a/b$	$w_1 / \frac{p_0 a^4}{E h^3}$	$M_{x1} / p_0 a^2$	$M_{y1} / p_0 b^2$	$R_{x2} / p_0 a$	$R_{y3} / p_0 b$	$R_{04} / p_0 ab$
1,00	-0,044 3	-0,047 8	-0,047 8	0,420	0,420	-0,065
1,10	-0,036 3	-0,040 8	-0,055 3	0,399	0,440	-0,064
1,20	-0,029 8	-0,034 8	-0,062 6	0,377	0,455	-0,063
1,30	-0,024 4	-0,029 8	-0,069 3	0,357	0,468	-0,062
1,40	-0,020 1	-0,025 8	-0,075 3	0,337	0,478	-0,059
1,50	-0,016 6	-0,022 2	-0,081 2	0,320	0,486	-0,057
1,60	-0,013 8	-0,019 3	-0,086 2	0,303	0,491	-0,055
1,70	-0,011 6	-0,016 8	-0,090 8	0,287	0,496	-0,053
1,80	-0,009 7	-0,014 8	-0,094 8	0,273	0,499	-0,050
1,90	-0,008 2	-0,013 0	-0,098 5	0,260	0,502	-0,048
2,00	-0,006 9	-0,011 6	-0,101 7	0,248	0,503	-0,046

Slika 2.1: Tablica iz inženjerskog priručnika [9]

$200000 \text{ N/mm}^2$ ,  $h = 10 \text{ mm}$ , dobiva se progib:

$$w_1 = -0,0069 \cdot \frac{p_0 \cdot a^4}{E \cdot h^3}, \quad (2.31)$$

$$w_1 = -0,0069 \cdot \frac{0,01 \cdot 1000^4}{200000 \cdot 10^3}. \quad (2.32)$$

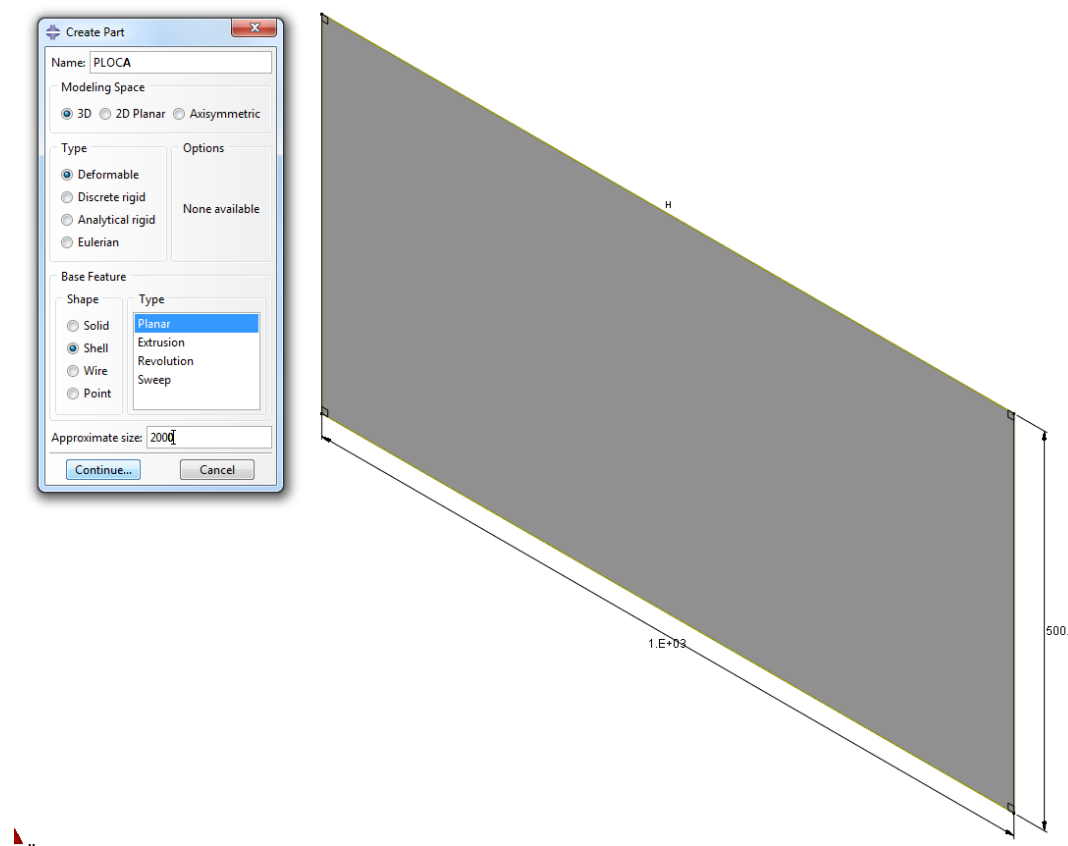
Dobiveni rezultat se poklapa sa dobivenim analitičkim rješenjem:

$$w = -0,3450 \text{ mm}. \quad (2.33)$$

## 2.4. Komercijalni računalni paket

Alternativni pristup dobivanju rješenja je korištenjem dostupnih računalnih alata za računanje konstrukcijskih problema. U ovom odlomku će biti pokazan postupak za proračun u paketu Abaqus. Verzija korištena u radu je 6.13, prema [3].

Prvo je potrebno definirati geometriju modela u izborniku 'Part', što prikazuje slika 2.2.

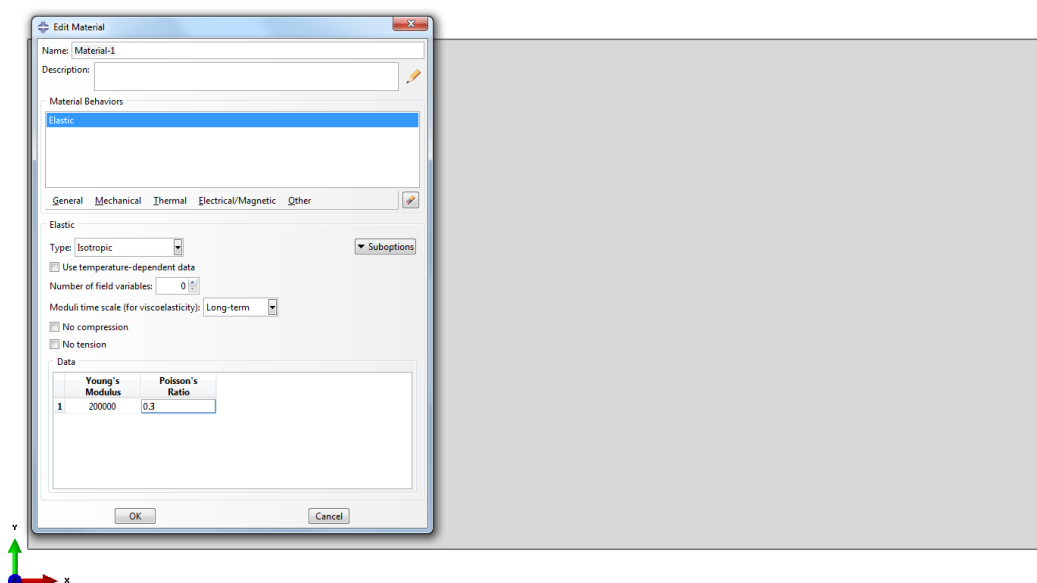


Slika 2.2: Definiranje geometrije

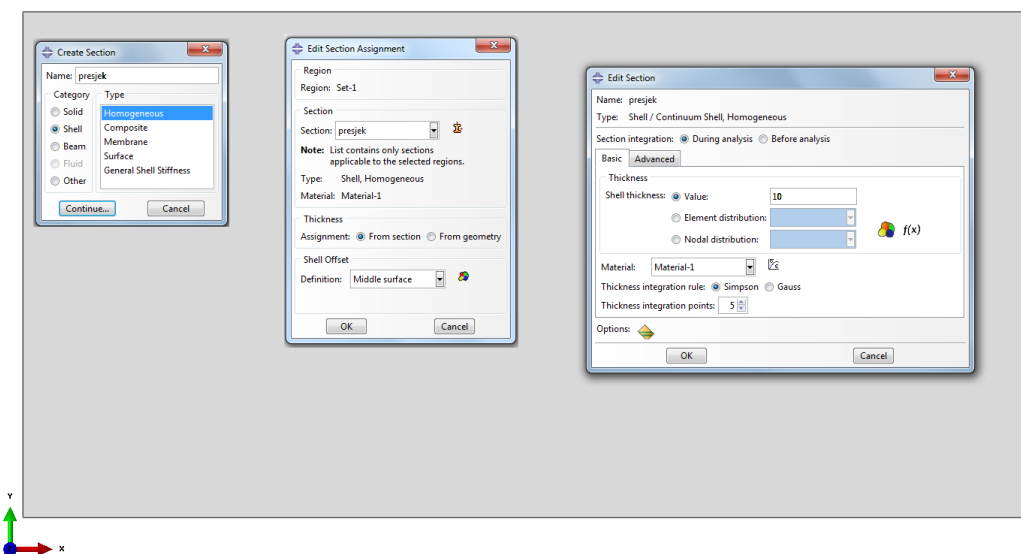
Nakon definiranja geometrije, potrebno je postaviti karakteristike materijala i presjeka. Parametri koje definiraju materijal su zadane prema tablici 1.1 iz prvog poglavlja, a odgovaraju homogenom čeliku u elastičnom području. Slika 2.4 prikazuje izbornike u kojima se može odrediti debljina presjeka i postavke integracije.

Slijedeće što je potrebno Abaqusovom solveru za analizu je odabir rješavača. Prema slici 2.5, se odabire općeniti, linearni rješavač, što odgovara proračunu uključenom u radu.

Kad je definirana sva geometrija i svi početni parametri, potrebno je zadati rubne uvjete.



Slika 2.3: Zadavanje svojstva elastičnog materijala (čelik)



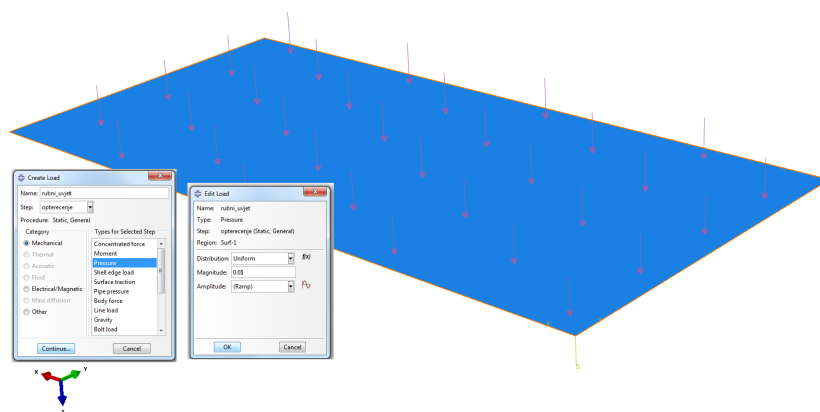
Slika 2.4: Postavljanje presjeka modela

Potrebno je postaviti opterećenje i fizikalne uvjete i definirati pomake ili geometrijske uvjete. Postavljanje opterećenja je prikazano na slici 2.6. Za zadani slučaj je potrebno ploči omogućiti pomake rubova, prema slici 2.7. Nakon postavljanja fizikalnog slučaja, zadnji korak je diskretizacija domene. U izborniku 'Mesh' je potrebno odabrati tip konačnog elementa.

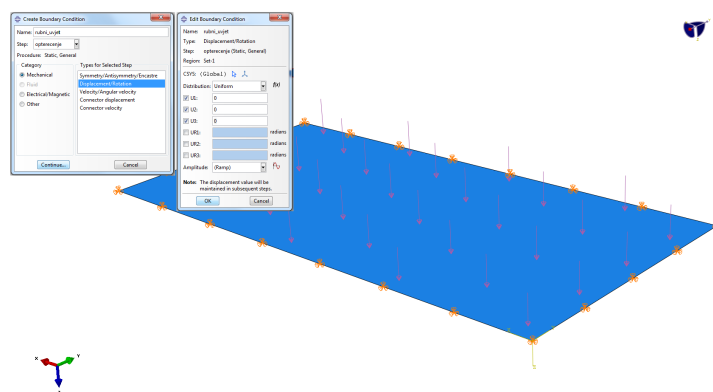


Slika 2.5: Linearno područje proračuna

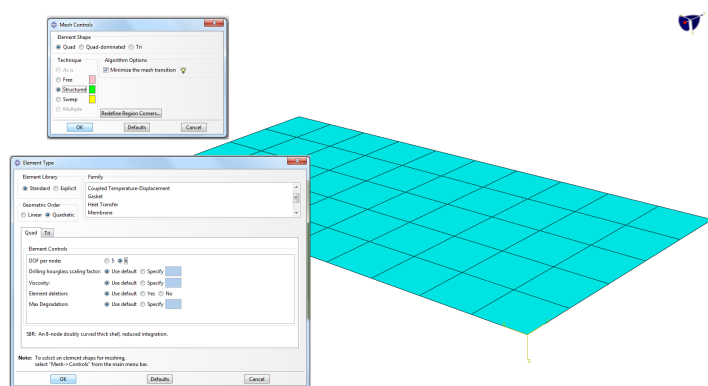
Postupak je predložen slikom 2.8. Korišteni su četverokutni elementi čija je oznaka u softveru S8. Ovi elementi odgovaraju četverokutno elementu koji ima četiri stupnja slobode, koji je kasnije korišten u poglavlju o konačnim elementima. Na kraju se dobiva konačno rješenje,

Slika 2.6: Kontinuirano opterećenje  $q_0 = 0,01 \text{ N/mm}^2$ 

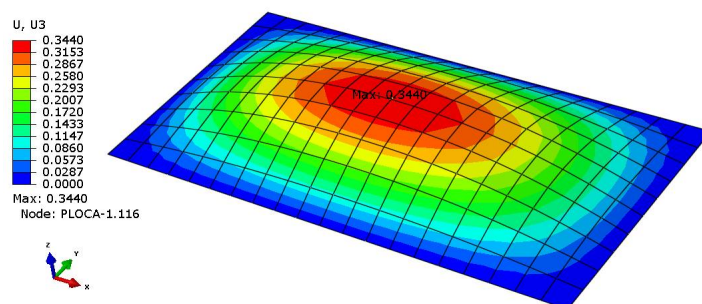
slika 2.9, na kojem se mora odabrati veličina koju se želi prikazati. Abaqus osim progiba i geometrijskih veličina računa automatski i ostale poput naprezanja i sila. Na 2.9 je prikazan progib koji iznosi  $w = 0,3440 \text{ mm}$ .



Slika 2.7: Rubni uvjet pomaka



Slika 2.8: Postavke mreže



Slika 2.9: Konačno rješenje

### 3. METODA KONAČNIH RAZLIKA

Parcijalne diferencijalne jednačbe nemaju općenito analitičko rješenje, već samo za neke specijalne slučajeve. Zbog toga se pribjegava numeričkim metodama koje su aproksimacija rješenja. One se na sreću donekle mogu procijeniti, i time dobiti prihvatljiva rješenja. Jedna od najintuitivnijih metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi je metoda konačnih razlika (MKR). Umjesto diferencijalnih jednačbi, rješava se sustav algebarskih jednačbi.

Na definiranoj domeni se postavi mreža čvorova u kojima se računa vrijednost funkcije. Tim diskretnim vrijednostima se funkcija aproksimira, kao što prikazuje slika 3.1 Iz definicije derivacije imamo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Ako bi se umjesto diferencijala  $dx$ , ostavio konačno veliki  $\Delta x$ , tada imamo aproksimaciju derivacije.

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{\Delta x} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.2)$$

Iz ovog izraza je vidljivo da točnost aproksimacije ovisi o veličini nazivnika, o razmaku dva čvora na mreži. Jer što je on manji, bliži nuli, to je aproksimacija točnija. Naravno, razlika funkcija se mogla uzeti i iz drugih točaka, Prema tome se razlikuju i ocjenjuju sheme diskretizacije.

#### 3.1. Izvod shema diferencije

Ako bismo raspisali razvoj Taylorovog reda za funkciju  $\phi$  oko neke točke  $x_i$ :

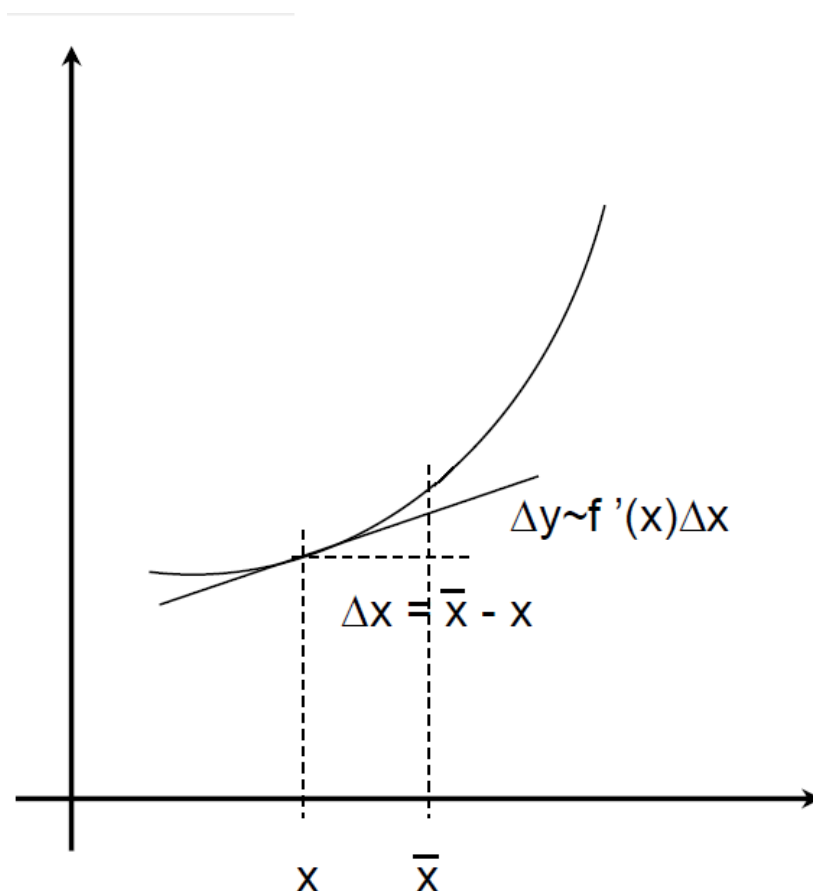
$$\phi(x) = \phi(x_i) + \frac{\phi'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{\phi''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{\phi'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 \dots, \quad (3.3)$$

gdje je opći član reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n. \quad (3.4)$$

Ako se iz (3.3) traži vrijednost funkcije u slijedećem čvoru  $x = x_{i+1}$ :

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + \frac{\phi'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\phi''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{\phi'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 \dots \quad (3.5)$$



Slika 3.1: Definicija derivacije

Uzimanjem samo prva dva člana reda i preoblikovanjem izraza se dobiva:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}. \quad (3.6)$$

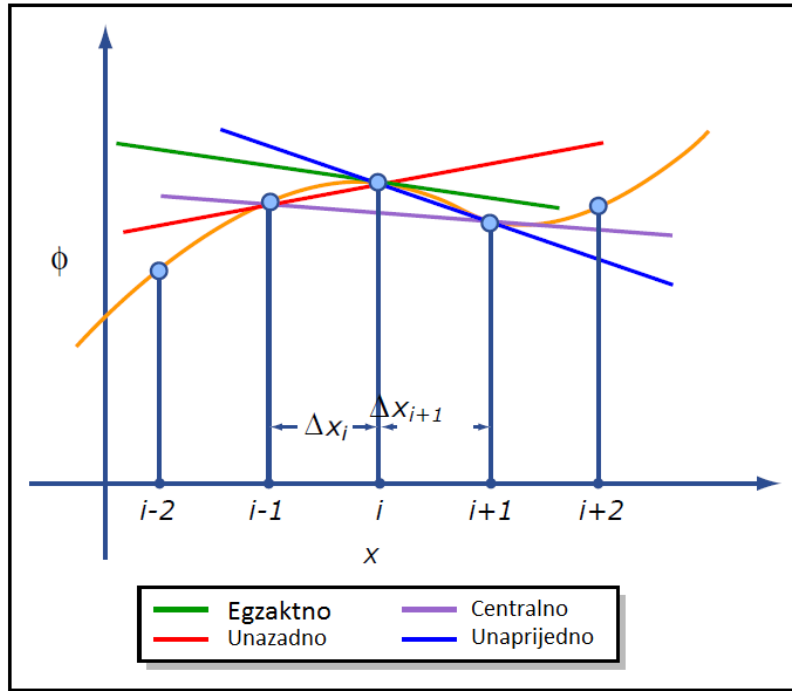
Ovakva aproksimacija se naziva *unaprijedna* ili *eksplicitna* shema diskretizacije prvog reda. Njena preciznost ovisi samo o članu  $h = x_{i+1} - x_i$ . Njena točnost i primjena imaju ograničenja, o čemu će biti riječi dalje.

Jednako tako se mogla tražiti i vrijednost funkcije u prethodnom čvoru  $x = x_{i-1}$ , pa bi se dobilo:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}. \quad (3.7)$$

Ovakva shema se zove *implicitna* i ona je također prvog reda točnosti, ali ima drugačija svojstva od eksplcitne. Sličnim pristupom dobivamo i shemu središnje razlike:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.8)$$



Slika 3.2: Aproksimacije derivacije

Izraz za aproksimacije derivacije drugog reda, glasi:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.9)$$

Ova shema je drugog reda točnosti, jer joj greška opada s kvadratom intervala  $h$  u mreži. Vidi se da je stupanj točnosti sheme određen brojem točaka koje koristimo. Budući da je zadani problem funkcija  $w(x, y)$  u dvije dimenzije, biti će potrebno aproksimirati dvije dimenzije.

### 3.2. Numeričko rješavanje

Iz vektorske analize je poznat *Hamiltonov operator nabla*,  $\nabla$ . Definira se kao parcijalna derivacija po koordinatama funkcije više varijabli iz koju preslikava u vektor.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (3.10)$$

Operator  $\Delta$  se naziva *Laplaceov operator* i definiran je kao:

$$\Delta() = \nabla \cdot \nabla(). \quad (3.11)$$



Bitno je napomenuti da se je dosad u razlomku sa  $\Delta x$  označavan interval između čvorova. Odsad će se njega oslovljavati kao  $h_x$  u  $x$ , i  $h_y$  u  $y$  smjeru. Jednadžba (1.30) se pomoću operatora  $\nabla$  zapisuje može zapisati kao:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \Delta(\Delta w) = \frac{q_z}{D}. \quad (3.12)$$

Ovo svojstvo je od velike koristi jer umjesto da rješavamo sustav četvrtog reda, moguće je rješavati jednostavniju, i dobro dokumentiranu, Poissonovu jednadžbu. Iz (3.12) kažemo da je funkcija  $u = u(x, y)$  izvorski član u jednadžbi  $\Delta w = u$ . Pa onda (3.12) postaje:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{q_z}{D}. \quad (3.13)$$

Dalje se rješavanje svodi na jednostavno rješavanje Poissonove jednadžbe. Pravokutnu ploču shvaćamo kao pravokutnu domenu  $(x, y)$ , koja se podijeli na ekvidistantne čvorove:

$$x = [0, 1000], \quad y = [0, 500]; \text{ uz } x_i = N * h_x, \quad y_j = M * h_y. \quad (3.14)$$

Prvo se derivacije iz (3.13) zamjene diskretiziranim vrijednostima (3.9):

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(h_x)^2} + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(h_y)^2} = \frac{q_z}{D}. \quad (3.15)$$

Ovu jednadžbu je potrebno postaviti za svaki čvor  $j, k$  u mreži. Rješavanjem razlomka iz sheme drugog reda (3.15) dobivamo koeficijente jednadžbe  $(j,k)$  čvora:

$$-2u_{i,j}(h_x^2 + h_y^2) + h_y^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h_x^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = \frac{q_z}{D} h_x^2 h_y^2. \quad (3.16)$$

Jednako tako se raspisom za svaki čvor dobiva jednadžba četvrtog reda. Na slikama 3.3 i 3.4 je vidljiva šablona za određeni red jednadžbe. Jednadžbe za svaki čvor čine sustav linearnih jednadžbi, koji se može zapisati kao dijagonaln matrica *krutosti* i vektor opterećenja.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in R^{N \times N}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{b} \in R^N. \quad (3.17)$$

Sve jednadžbe su dobivene šablonski, pa je za očekivati da će i punjenje matrice linearnog sustava biti po nekom "pravilu". Sastavljanjem sustava jednadžbi samo za prvi red dobivamo matrice  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$ : Ako vektor nepoznanica, vrijednosti u čvorovima  $\mathbf{u} = [u_1; u_2; u_3; \dots; u_N]$  zapišemo kompaktnije kao vektor zasebnih vektora za svaki red čvorova dobivamo:

$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{j=1}; \mathbf{u}_{j=2}; \dots \mathbf{u}_{j=N_y}]$ . Matrice  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  su kvadratne, čije su dimenzije jednake broju čvorova u redu  $N_x$ :

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} -2(h_x^2 + h_y^2) & h_y^2 & 0 & 0 \\ h_y^2 & -2(h_x^2 + h_y^2) & h_y^2 & 0 \\ 0 & h_y^2 & -2(h_x^2 + h_y^2) & h_y^2 \\ 0 & 0 & h_y^2 & -2(h_x^2 + h_y^2) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

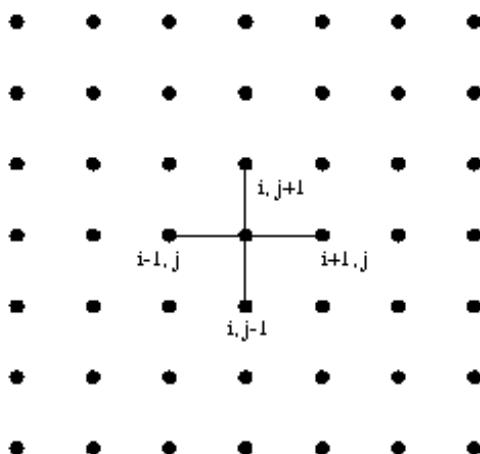
$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} h_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Sada se matrica  $\mathbf{A}$  može sažetije prikazati kao:

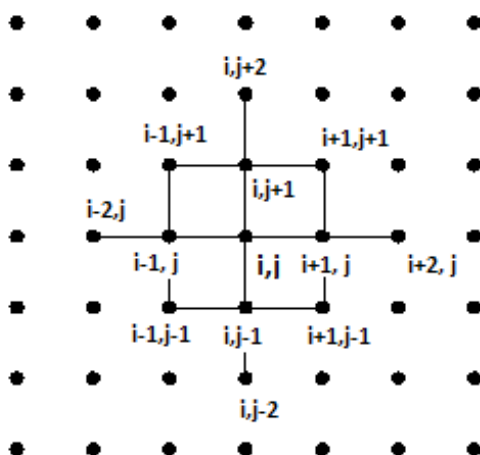
$$\begin{bmatrix} C_1 & D_1 & & & \\ D_2 & C_2 & D_2 & & \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ & & & D_{N_y-1} & C_{N_y} - 1 & D_{N_y-1} \\ & & & & D_{N_y} & C_{N_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{j=1} \\ \mathbf{u}_{j=2} \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_{j=N_y-1} \\ \mathbf{u}_{j=N_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{j=1} \\ \mathbf{b}_{j=2} \\ \mathbf{b}_j \\ \mathbf{b}_{j=N_y-1} \\ \mathbf{b}_{j=N_y} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

### 3.3. Rezultati

Kao što je opisano ranije, biharmonijsku jednadžbu se može izračunati ili direktno diskretizacijom cjelokupne jednadžbe ili dvostrukim rješavanjem Poissonove jednadžbe. Prvi pristup se sastoji od toga da se četvrta derivacija aproksimira konačnim razlikama. To podrazumijeva sastavljanje sutava prema šablوني (*stencil*) prema slici 3.4. Drugi pristup, dvostruko rješavanje Poissonove jednadžbe zahtjeva sastavljanje linearnog sustava prema šablوني na slici 3.3. Dobivene vrijednosti u čvorovima se koristi kao izvorski član novog linearnog sustava. Naravno, i rješavanje Poissonove jednadžbe se može rješavati shemom četvrtog reda, čija je šablona ima elemente samo na glavnim osima, kao kod šablone Poissonove jednadžbe. Na obje slike su slučajevi shema drugog reda točnosti.



Slika 3.3: Šablona diskretizacije Poissonove jednadžbe



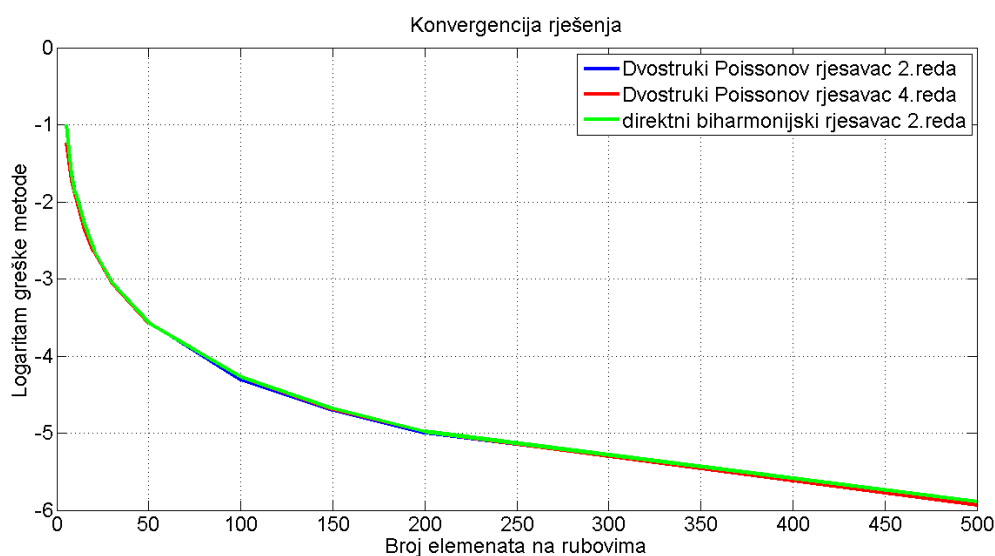
Slika 3.4: Šablona direktne diskretizacije biharmonijske jednadžbe

U priloženoj tablici 3.1 se mogu usporediti rezultati dobiveni različitim pristupima rješavanja.

Rezultati iz tablice 3.1 su prikazani grafički na slici 3.5: Na slici 3.5 vidimo razlike dobivenog rješenja od egzaktnog analitičkog (2.29). Razlike su manje od 5 % već nakon 20 čvorova po rubu. Zbog toga su prikazane logaritamske vrijednosti da bi se nešto razaznalo. Očito sve diskretizacije jako dobro aproksimiraju rješenje. Iz slike 3.6 se vidi očekivani rezultati, a to je da metoda četvrtog reda brže konvergira, ali na kraju pogađaju jednako rješenje. Isto tako, činjenica da metoda direktnog rješavanja i metoda dvostrukog rješavanja Poissonove jednadžbe dobiva identične rezultate, potvrđuje ekvivalentnost različitih matematičkih

Tablica 3.1: Tablica progiba dobivenih MKR metodom

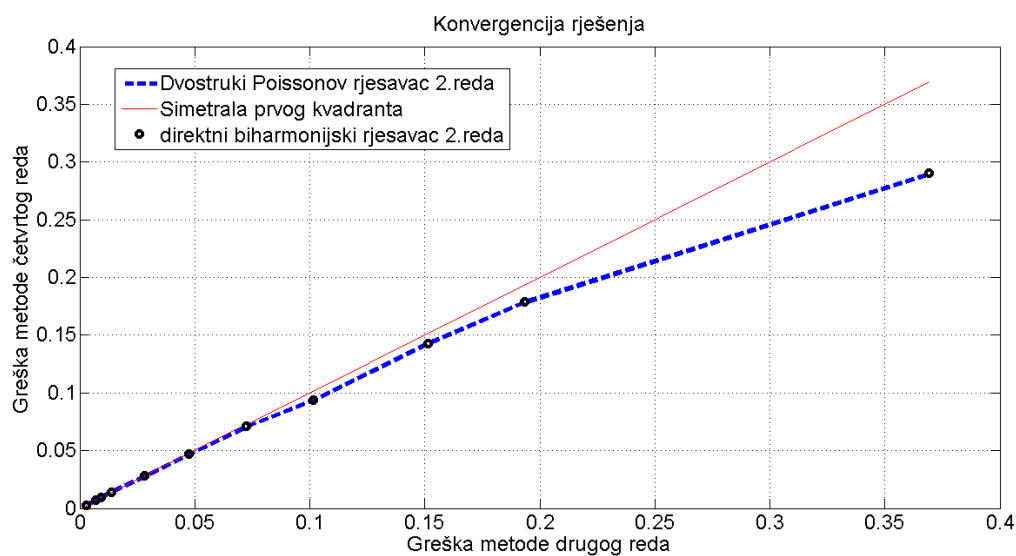
broj cvorova ( $N_x \times N_y$ )	Poisson (2. reda)	Poisson (4. reda)	biharmonijski rj. (2.reda)
25( $5 \times 5$ )	0,7149 mm	0,6357 mm	0,7148 mm
64( $8 \times 8$ )	0,5391 mm	0,5243 mm	0,5390mm
100( $10 \times 10$ )	0,4971 mm	0,4884 mm	0,4971 mm
225( $15 \times 15$ )	0,4473 mm	0,4395 mm	0,4472 mm
400( $20 \times 20$ )	0,4181 mm	0,4165 mm	0,4180 mm
900( $30 \times 30$ )	0,3932 mm	0,3926 mm	0,3932 mm
2500( $50 \times 50$ )	0,3738 mm	0,3736 mm	0,3738 mm
10000( $100 \times 100$ )	0,359 mm	0,3596 mm	0,3596 mm
22500( $150 \times 150$ )	0,3547mm	0,3548 mm	0,3549 mm
40000( $200 \times 200$ )	0,3524 mm	0,3525 mm	0,3525 mm
225000( $500 \times 500$ )	0,3484 mm	0,3483 mm	0,3484 mm



Slika 3.5: Usporedba grešaka za različite metode

formulacija.

Metoda direktne diskretizacije je daleko kompliciranija za implementirati za nehomogene i netrivialne Dirichletove uvjete, a pogotovo za Neumanove. Iz predloženih rezultata nema

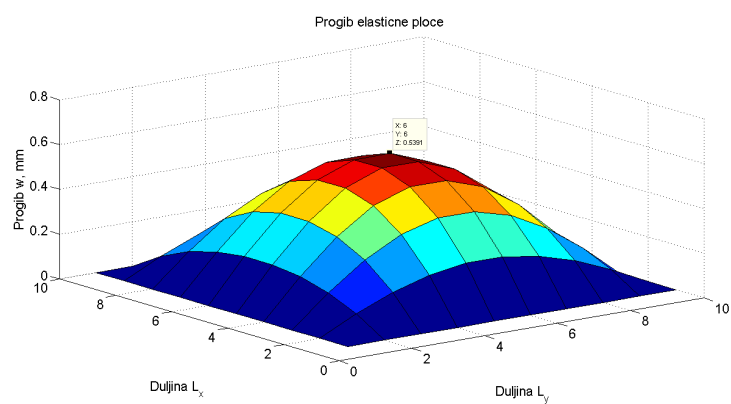
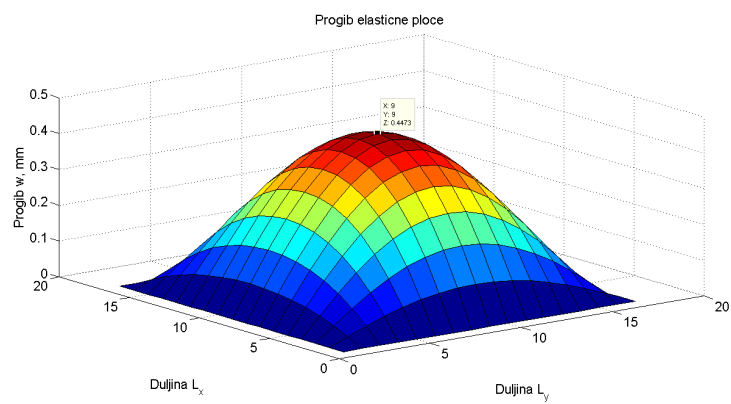


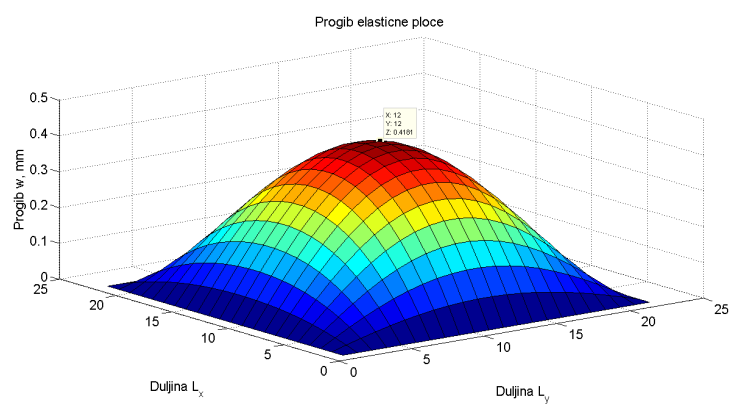
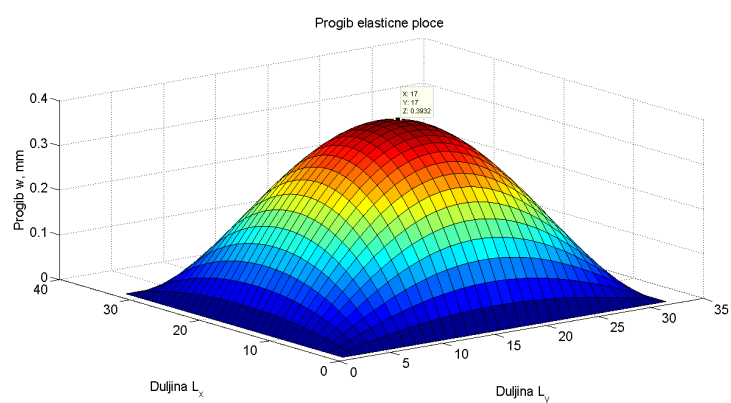
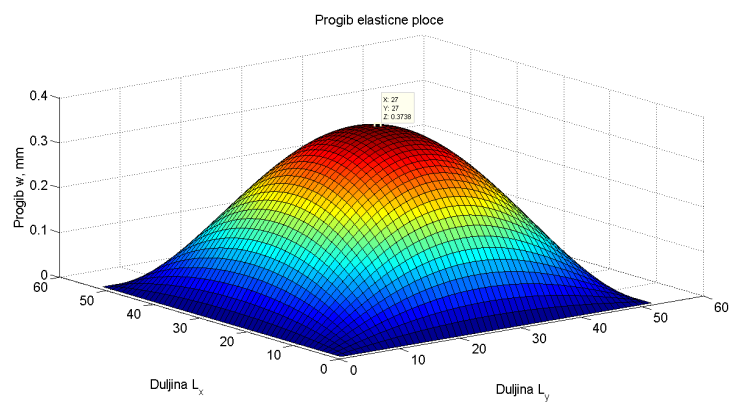
Slika 3.6: Usporedba brzine konvergencije metoda

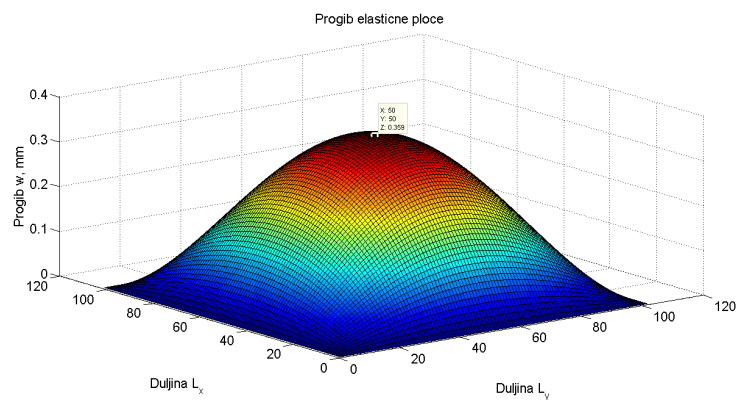
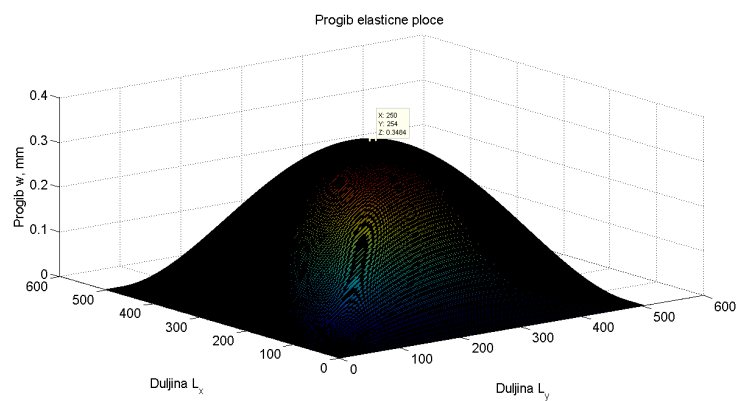
prednosti nad metodom dvostrukog rješavanja Poissonove jednadžbe, pa treba razmisliti o isplativosti implementiranja.

U nastavku su prikazani rezultati dobiveni shemom drugog reda:

Slika 3.7: Progib:  $w = 0,7149$  mm ( $5 \times 5$ )

Slika 3.8: Progib:  $w = 0,5391$  mm ( $8 \times 8$ )Slika 3.9: Progib:  $w = 0,4971$  mm ( $8 \times 8$ )Slika 3.10: Progib:  $w = 0,4473$  mm ( $10 \times 10$ )

Slika 3.11: Progib:  $w = 0,4181$  mm ( $20 \times 20$ )Slika 3.12: Progib:  $w = 0,3932$  mm ( $30 \times 30$ )Slika 3.13: Progib:  $w = 0,3738$  mm ( $50 \times 50$ )

Slika 3.14: Progib:  $w = 0,359$  mm ( $100 \times 100$ )Slika 3.15: Progib:  $w = 0,3484$  mm ( $500 \times 500$ )



## 4. METODA KONAČNIH ELE-MENATA

### 4.1. Uvod i motivacija

Među inženjerima i fizičarima je teško pronaći nekog tko se nije susreo ili barem čuo za metodu konačnih elemanta. To je numerička metoda za dobivanje približnih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi s primjenom u znanstvenoj i inženjerskoj praksi. Još neke od poznatijih metoda su, već spomenuta, metoda konačnih razlika te metoda konačnih volumena. Sve tri metode, kao i ostale njima slične, se razlikuju po matematičkom alatu kojim se dokazuje preciznost. Primjerice, metoda konačnih razlika koristi direktnu aproksimaciju derivacija. Metoda konačnih elemenata koristi varijacijski račun, odnosno integrira diferencijalnu jednačbu preko prostora domene. Metoda konačnih volumena se bazira na sličnim matematičkim teoremima kao i konačni elementi, ali je u implementaciji bliža konačnim razlikama jer koristi diferencijske sheme i razne interpolacije. Njenu konvergenciju i postojanje rješenja je najteže dokazati pa je isključena iz razmatranja u ovom radu. Naravno postoje i brojne druge metode, s drugačijim aproksimacijama ili čak *bezmrežne* koje su neovisne o kvaliteti mreže čvorova. Ovdje je korištena metoda konačnih elemenata jer nadilazi sve nedostatke konačnih razlika, a matematički alat nije pretjerano apstraktan i kompliciran o čemu više riječi u idućim poglavljima.

### 4.2. Matematički model problema

U prvom poglavlju je prikazan izvod matematičkog modela savijanja tanke ploče. Jednačba koja opisuje fenomen je biharmonijska jednačba. Rješenje te jednačbe mora biti kontinuirana funkcija i imati derivaciju četvrtog reda. Naravno, postoji *neki* polinom koji to zadovoljava, ali je komplicirano iz općenitog polinoma uvrštavanjem rubnih uvjeta doći do rješenja. Trigonometrijske funkcije zadovoljavaju te potrebe za kontinuiranošću i imaju beskonačno definiranih derivacija, i pomoću njih dobivamo analitičko rješenje preko dvostrukog Fourierovog reda.

Ideja konačnih elemenata je da se prostor domene, tanka ploča, podijeli na manje konvek-

sne elementarne likove na kojima se mogu definirati polinomi nižih redova tako da ih možemo lako integrirati. Zbog toga se u toj metodi koristi varijacijski ili integralni račun. Za funkcija progiba  $w(x, y) \in \Omega$  možemo reći da pripada  $L^2(\Omega)$ . Prostor funkcija  $L^2$  je definiran kao:

$$L^2 = \int_{\Omega} |x|^2 < \infty. \quad (4.1)$$

Takve funkcije preslikavaju elemente domene  $\Omega$  u neki realan broj na način da je integral njihovog kvadrata na cijelom području konačan. Ovime se isključuje sve funkcije koje imaju singularitet na tom području. Kao na primjer hiperbolna funkcija. Dalje u tekstu će se takve funkcije nazivati i konačnim ili regularnim. Integral ne mora biti Riemmanov, već je dovoljno da bude Lebesgueov. To je samo definicija kvadratno-integralnog prostora  $L^2$ . U praksi skoro sve funkcije koje inženjeri koriste imaju Riemmanov integral, odnosno, u svakoj točki im je lijeva i desna Darbouxova suma jednaka.

Osim što su funkcije konačne, bitno je zadovoljiti i da su rubovi konačnih elemenata kontinuirani. Za ovo je potreban Soboljevljev prostor funkcija  $H^1(\Omega)$ :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right. \right\}. \quad (4.2)$$

To je prostor (*konačnih*) funkcija, čije su prve derivacije također konačnog integrala. Na prvi pogled zapis djeluje komplicirano, ali on osigurava da funkcije budu kontinuirane i s glatkim prijelazom. Ako prve derivacije nemaju singulariteta, neće se pojaviti skokovi i *bodlje* na funkciji. Nedostaci metode konačnih razlika su :

- nepraktičnost implementacije na kompleksnim nepravilnim domenama,
- upotreba neuniformne mreže je komplicirana za implementaciju,
- komplicirano zadavanje rubnih uvjeta,
- nepraktično postizanje metoda višeg reda.

U slijedećim odlomcima će biti vidljivo kako metoda konačnih elemenata (MKE) zaobilazi ove probleme, te za razliku od metode konačnih razlika (MKR), pruža vrijednosti funkcije na cijeloj domeni, a ne samo u vrijednostima čvorova.

### 4.3. Varijacijski račun

U većini literature se metoda konačnih elemenata uvodi poslije metode težinskih reziduala pa ni ovaj rad neće biti iznimka. Ideja je da se cijela jednačba pomnoži sa *testnom* funkcijom  $v$ . Ta funkcija se promatra kao "parametar" tražene funkcije  $\phi$ , i u poglavljima iz mehanike se ona zamišlja kao virtualni pomak, moguće odstupanje vrijednosti  $u(x)$ . Jednako kao i  $u$ , i testna funkcija mora biti glatka:

$$\int_{\Omega} v \Phi - v q = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega), \quad (4.3)$$

što se kraće piše kao skalarni produkt:

$$(v, \Phi - q) = 0. \quad (4.4)$$

Ovdje dolazimo do "konačnih" elemenata. Funkcije  $u$  i  $v$  se aproksimiraju konačnim brojem aproksimacijskih, jednostavnih funkcija. Umjesto jednog elementa s nekom komplicirano funkcijom, uzima se element s nekoliko čvorova da se konstruira aproksimacijska funkcija. Funkcija  $u$  i  $v$  se zamjenjuje konačno dimenzionalnim:

$$u \approx U(x) = \sum_j c_j \phi_j, \quad v \approx V(x) = \sum_j d_j \psi_j. \quad (4.5)$$

Kad se u integralnu jednačbu (4.3) uvedu ove aproksimacije ?? dobiva se:

$$(V, \Phi(U) - q) = 0. \quad (4.6)$$

Greška aproksimacije, rezidual se zapisuje kao razlika točnog rješenja i onog dobivenom aproksimiranom funkcijom  $U$ .

$$\Phi(U) - q(x) = r(x). \quad (4.7)$$

Naravno, teži se da taj rezidual bude nula, ili barem teži nuli. Iz umnoška (4.6), u kojem je skalarni produkt reziduala i testne funkcije jednak nuli, slijedi da je za svaki  $V$  ortogonalan na rezidual u području domene. Uvrštavanjem (4.5) u (4.6) dobiva se:

$$\sum_j d_j (\psi_j, c_j \phi_j - q \psi_j) = 0, \quad \forall d_j, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.8)$$

Dakle za svaki element postoji  $j$  homogenih linearnih jednačbi. Ovdje završava koncept metode konačnih reziduala jer je pokazano što mora biti zadovoljeno za dobivanje rješenja. Dalje

ostaje za definirati funkcije  $\psi$  i  $\phi$ . Ako se odabere isti prostor funkcija dobivamo Galerkinovu formulaciju konačnih elemenata koja izgleda ovako:

$$\int_{\Omega} \phi_j \phi_i - q \phi_j = 0. \quad (4.9)$$

Biharmonijska jednadžba traži funkcije barem  $C^2(\Omega)$  kontinuiteta, to je ipak glade nego je potrebno. Zbog parcijalnog integriranja je dovoljno čak imati i samo  $C^1(\Omega)$ . Zbog toga se ovakva formulacija naziva i *slaba formulacija*. Iz matematike znamo za parcijalnu integraciju, koja će omogućiti da koristimo funkcije manjeg kontinuiteta od početno potrebnog:

$$\int_{\Omega} u dv = uv - \int_{\Omega} v du. \quad (4.10)$$

Kao i u metodi konačnih razlika, i ovdje će se usporediti rješavanje biharmonijske jednadžbe direktno i preko dvostrukog rješavanja Poissonove jednadžbe.

#### 4.4. Rješenje Poissonove jednadžbe

Poissonova jednadžba je nehomogena Laplaceova jednadžba i da bi je se riješilo preko konačnih elemenata, potrebno je pomnožiti ju s testnom funkcijom i integrirati:

$$\int_{\Omega} v \left( \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} - q \right) = 0, \quad (4.11)$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{dy^2} - \int_{\Omega} qv = 0. \quad (4.12)$$

Ovdje je jasno da ne moramo imati aproksimacijsku funkciju drugog reda, već nakon parcijalnog integriranja poznavati normalu funkcije. Pa je parcijalni integral za svaki član :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{dx^2} = v \frac{\partial u}{dx} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{dx} \frac{\partial u}{dx}, \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{dy^2} = v \frac{\partial u}{dy} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{dy} \frac{\partial u}{dy}. \quad (4.14)$$

Naravno, na rubu je definiran Dirichletov uvjet i prema tome testna funkcija, odnosno *varijacija*  $v$  iščezava. Zbog toga ostaju samo integrali i konačna forma jednadžbe:

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial v}{dx} \frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial v}{dy} \frac{\partial u}{dy} = \int_{\Omega} qv. \quad (4.15)$$

Za ovakvo postavljenu jednadžbu je dovoljno da su funkcije  $u$  i  $v$  linearne i zbog toga koristimo osnovni pravokutni element s četiri stupnja slobode gibanja.

## 4.5. Direktno rješenje biharmonijske jednadžbe

Izvod započinje jednako kao i za Poissonovu (4.12), množenjem varijacijom  $v$  i integracijom po domeni:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^4 u}{dx^4} + v 2 \frac{\partial^4 u}{dx^2 dy^2} + v \frac{\partial^4 u}{dy^4} - v q = 0. \quad (4.16)$$

Svaki član također možemo parcijalno integrirati:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^4 u}{dx^4} = v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (4.17)$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = v \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \quad (4.18)$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^4 u}{dy^4} = v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \quad (4.19)$$

Naravno, na rubu  $\partial\Omega$  je definiran Dirichletov uvjet pa nema varijacije  $v$ . Ostaju opet samo integrali koji se mogu dalje parcijalno integrirati:

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (4.20)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (4.21)$$

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\partial\Omega}. \quad (4.22)$$

Kako su rubovi slobodno oslonjeni, članovi uz rub opet nestaju. Preostaje opet čisto integriranje derivacija i dobivamo konačnu jednadžbu. Odavde se vidi da interpolacijske funkcije trebaju biti minimalno drugog reda. Više njihovoj konstrukciji i svojstvima u idućem odlomku.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \int_{\Omega} q v. \quad (4.23)$$

## 4.6. Funkcije oblika

Glatke(Soboljeve) funkcije  $u$  i  $v$  aproksimiramo linearnom kombinacijom funkcija  $\phi$ . One su definirane zasebno, svaka za jedan čvor elementa na način da je za svaki čvor  $j$  vrijednost interpolacijske funkcije jednaka 1, a za ostale 0. Te funkcije nazivamo funkcijama oblika.

Ovakva svojstva imaju primjerice Lagrangeovi interpolacijski polinomi. Lagrangeov polinom je zapisan kao:

$$l(x) = c_1\phi(x)_1 + c_2\phi(x)_2 + c_3\phi(x)_3 = c_j\phi_j. \quad (4.24)$$

Jednostavan zapis definicije funkcija oblika je preko Kroneckerovog simbola:

$$\phi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (4.25)$$

Korištene mreže u radu su pravokutne, sa četiri, osam i šesnaest stupnjeva slobode. Mreža ne mora biti uniformna, jer napisan algoritam podržava i neuniformne elemente. Time se htjelo postići usporedba konvergencije rješenja za različiti red elementa. To se postiže dodavanjem više stupnjeva slobode, odnosno više koeficijenata u polinomu funkcije po elementu. Ti stupnjevi slobode ne moraju biti novi čvorovi, što je često ne praktično i nepotrebno komplicira stvari, već se pribjegava dodavanju stupnjeva slobode kao derivacija, zakret na čvoru koji već postoji. Time se postiže preciznije rješenje, a lakše je za implementirati.

#### 4.6.1. Osnovni jednodimenzijski pravokutni element

Osnovni pravokutni element ima četiri čvora u vrhovima. U čvorovima će se računati samo progib pa govorimo o jednodimenzijskom elementu. Polje progiba koje se može opisati pomoću četiri podatka izgleda:

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy. \quad (4.26)$$

Funkcije oblika za svaki čvor su:

$$\phi_1 = 1/4 \left(1 - \frac{x}{L_x}\right) \left(1 - \frac{y}{L_y}\right), \quad (4.27)$$

$$\phi_2 = 1/4 \left(1 + \frac{x}{L_x}\right) \left(1 - \frac{y}{L_y}\right), \quad (4.28)$$

$$\phi_3 = 1/4 \left(11 + \frac{x}{L_x}\right) \left(1 + \frac{y}{L_y}\right), \quad (4.29)$$

$$\phi_4 = 1/4 \left(1 - \frac{x}{L_x}\right) \left(1 + \frac{y}{L_y}\right). \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

Izrazi u zagradi su normirane koordinate, zovu se još i prirodne. Zapisuju se kao  $\xi = x/L_x$  i  $\eta = y/L_y$  i vrijednosti su im od nula do jedan. Opći zapis svih funkcija oblika preko prirodnih

koordinata na tom elementu je:

$$\phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta). \quad (4.32)$$

#### 4.6.2. Kvadratni jednodimenzijski pravokutni element

Dodavanjem još jednog čvora po sredini ruba se može dobiti kvadratna funkcija interpolacije, za razliku od osnovne linearne. Klasičnim pristupom sastavljanja funkcije oblika, množenjem Lagrangeovih polinoma bi se dobio čvor po sredini elementa, koji je suvišan. Za ovakve primjene su prikladniji Serendipity elementi. Iz knjige prof. Sorića koristimo formulu:

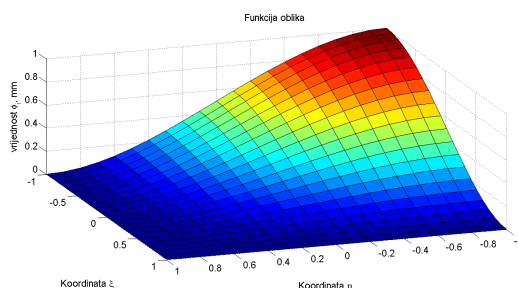
$$\phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi\xi_i + \eta\eta_i -). \quad (4.33)$$

#### 4.6.3. Pločasti jednodimenzijski pravokutni element

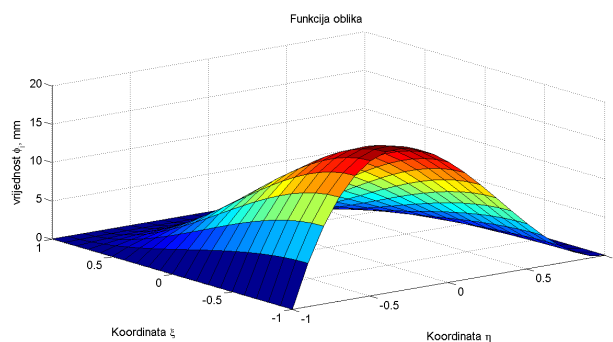
Dodavanjem dodatnih čvorova po rubovima se dobiva još parametara, i time i viši polinom interpolacije. Neka je poželjnije umjesto dodatnih čvorova, u istim čvorovima dodavati prve derivacije, odnosno zakrete. Zbog tog zahtjeva za glatkost prijelaza elemenata očekujemo da će se postići brža konvergencija rješenja. Za svaki čvor je osim funkcije slobode gibanja, što za pločasti element interpretiramo kao progib, je definirana i derivacija u oba koordinatna smjera. Da bi element bio konforman, monotono konvergirao, potrebno je i uvrstiti i četvrtu veličinu, miješanu derivaciju. Prema tome, svaki čvor  $i$  ima veličine:

$$\mathbf{v}_i^T = \left[ w_i \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_i \right]. \quad (4.34)$$

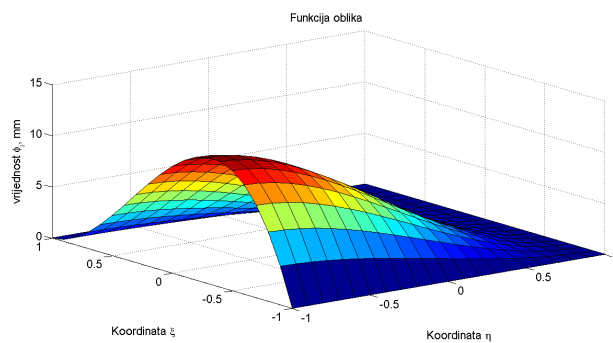
Lokalni vektor stupnjeva slobode ima 16 elemenata, koji izgledaju prema slikama 4.1-4.4:



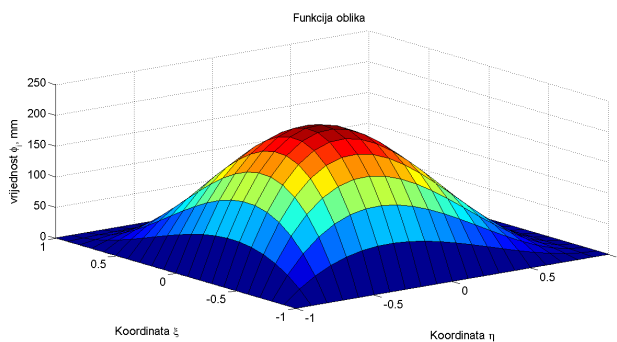
Slika 4.1: Funkcija oblika za progib u čvoru



Slika 4.2: Funkcija oblika za zakret u čvoru



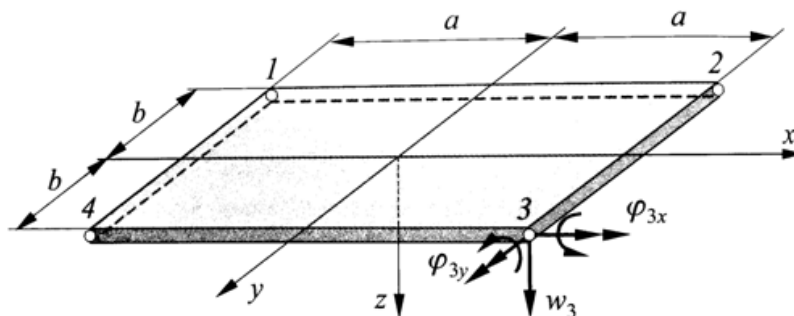
Slika 4.3: Funkcija oblika za zakret u čvoru



Slika 4.4: Funkcija oblika za miješanu derivaciju



Slika 4.5 prikazuje stupnjeve slobode pločastog elementa s dvanaest stupnjeva slobode. Takav element nije konforman, tj. ne konvergira monotono. U okviru ovog rada je dodana i miješana parcijalna derivacija te takav, konforman, element, sa šesnaest stupnjeva postiže, uniformnu konvergenciju.



Slika 4.5: Skica pločastog elementa

## 4.7. Numerička integracija

Odabir konačnih elemenata se svodi na odabiranje određenih funkcija oblika. Njih je onda potrebno uvrstiti u (4.23) i integrirati. Integraciju bi bilo najelegantnije provesti simbolički, tj. da stroj odglumi matematičara i vrati primitivnu funkciju. To je ili nemoguće, ili nepraktično, pa će se ovdje koristiti numerička integracija. Jedan od postupaka je *Gaussov* kvadratnim pravilom. Postoje još i Newton-Cotesove formule, ali one za isti red polinoma imaju više procjena funkcije. U radu će se integrirati samo dvodimenzionalne funkcije, ali je lakše pokazati pravilo na jednodimenzionalnoj funkciji. Integriranje funkcije u prirodnim koordinatama se može zapisati kao :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) + E. \quad (4.35)$$

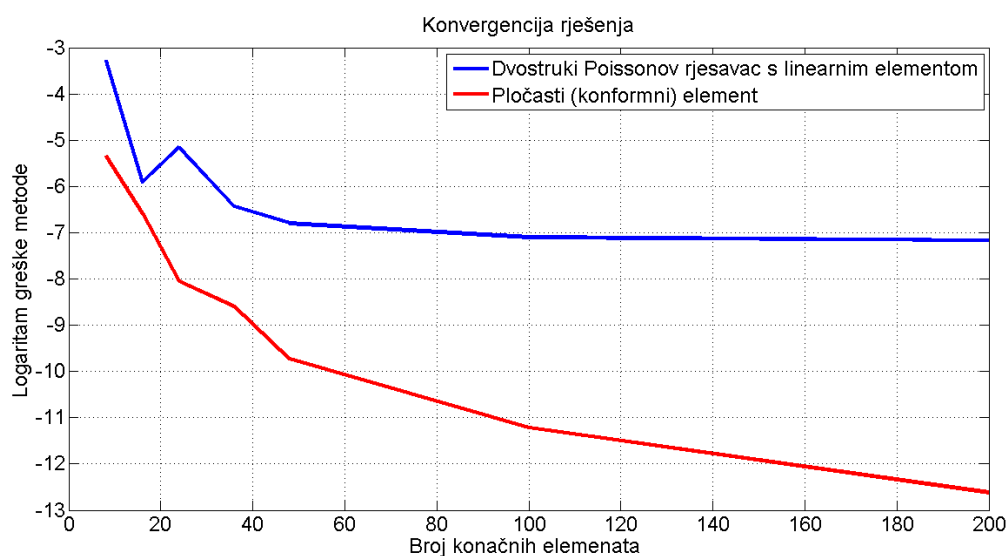
U literaturi se može pronaći dovoljno materijala o matematičkoj pozadini ovakve integracije. Moguće je čak i egzaktno integrirati polinome viših redova ( $E=0$ ). Težine  $W_i$  se nazivaju *Cristoffelovim težinama* i mogu se pronaći u tablici u matematičkim priručnicima. Jednako kao i dvostruki integrali, tako se sklope i dvostruke sume.

## 4.8. Rezultati

Za dobivanje rezultata, potrebno je izraditi mrežu. Mreža je dobivena preko Abaqusa, a izvučena u tekstualnim *input* fileovima.

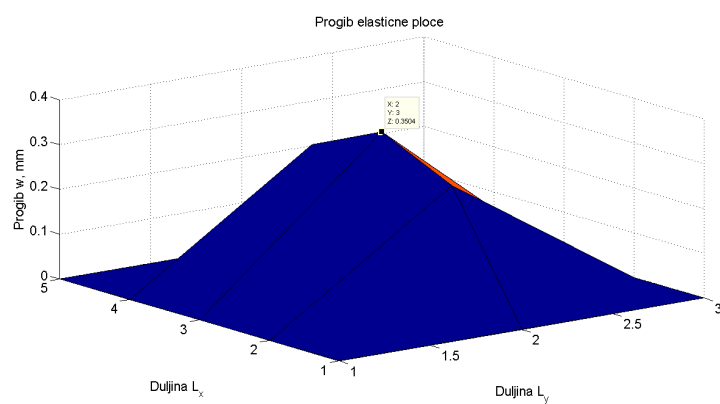
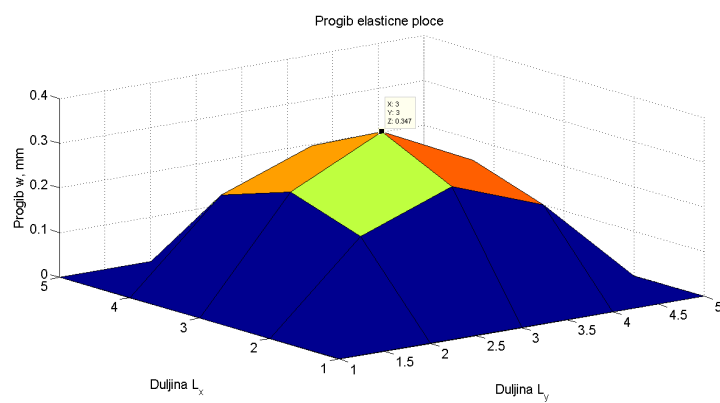
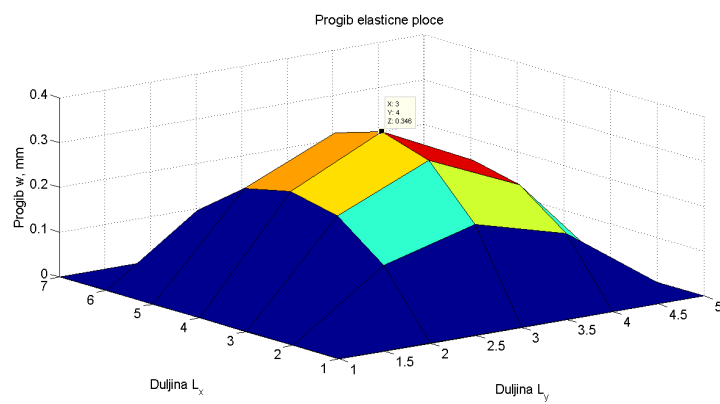
Tablica 4.1: Tablica progiba dobivenih MKE metodom

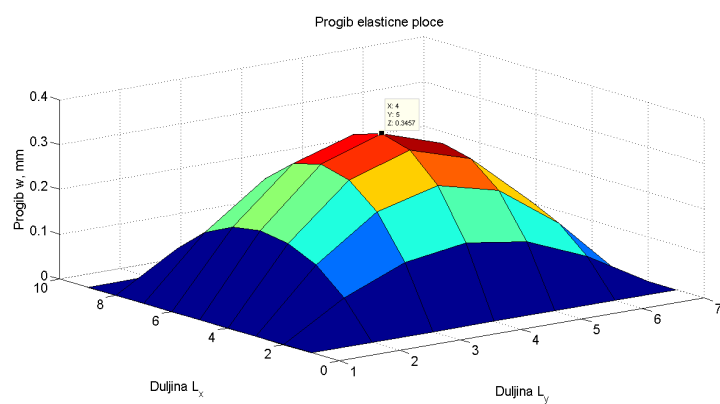
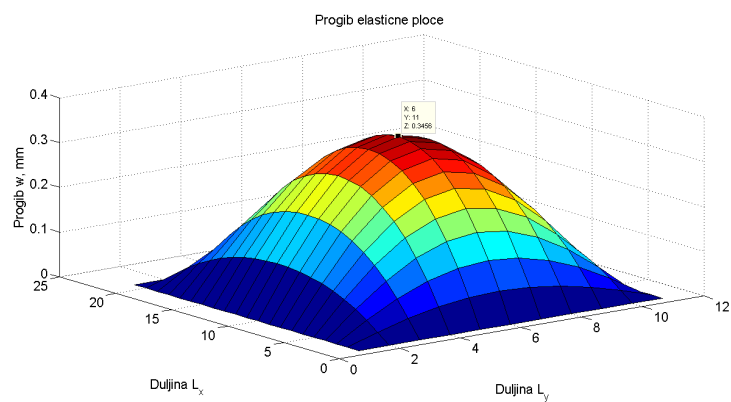
broj elemenata ( $N_x \times N_y$ )	Poisson lin.	pločasti element (biharmonic)
8 ( $4 \times 2$ )	0,3079921 mm	0,3504 mm
16 ( $4 \times 4$ )	0,3483494 mm	0,3470175 mm
24 ( $6 \times 4$ )	0,3398285 mm	0,3459573 mm
36 ( $15 \times 15$ )	0,3472396 mm	0,3458253 mm
48 ( $20 \times 20$ )	0,34452776 mm	0,345699699 mm
100 ( $30 \times 30$ )	0,3464651 mm	0,34565347 mm
200 ( $50 \times 50$ )	0,344871 mm	0,34564330 mm



Slika 4.6: Usporedba konvergencije rješenja konačnih elemenata

Rezultati iz tablice 4.1 su grafički prikazani na slici 4.6, na kojoj se uočava monotona konvergencija pločastih elemenata koji su i nekoliko redova precizniji od četverokutnog elementa koji ima samo četiri čvora i bilinearnu funkciju oblika. Na slikama 4.7-4.12 se može pratiti konvergencija rješenja na pločastim elementima.

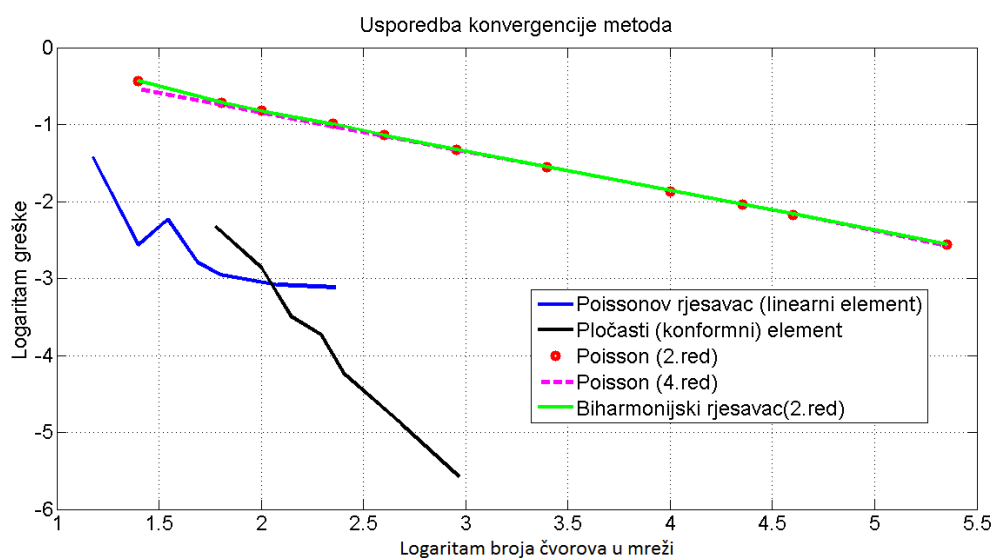
Slika 4.7: Progib:  $w = 0,3504$  mm (8 elemenata)Slika 4.8: Progib:  $w = 0,34701$  mm (16 elemenata)Slika 4.9: Progib:  $w = 0,34595$  mm (24 elemenata)

Slika 4.10: Progib:  $w = 0,34569$  mm (48 elemenata)Slika 4.11: Progib:  $w = 0,345653$  mm (100 elemenata)Slika 4.12: Progib:  $w = 0,34564$  mm (200 elemenata)

## 5. USPOREDBA NUMERIČKIH METODA

Kao što je već navedeno, svaka metoda ima svoje prednosti i mane. Pri odabiru metode, treba ocijeniti koja metoda je numerički efikasnija za zadani problem i je li isplativo implementirati tu metodu radi postizanja dovoljno visoke preciznosti. Obe metode se svode na linearni sustav koji treba riješiti, gdje je rang matrice jednak broju čvorova, odnosno jednadžbi koje se postavlja. Prema tome, može ih se usporediti po rang matrice linearnog sustava koji se rješava u odnosu na točnost koja se postiže. Osim preciznosti, bitna je i robusnost metode, odnosno, koliko je ona otporna na promjene mreže ili broja čvorova.

Na slici 5.1 su predloženi rezultati obiju metoda obrađenih u radu. Graf je dan u loga-



Slika 5.1: Usporedba konvergencije metoda

ritamskom mjerilu iz razloga što je veliko rasipanje vrijednosti broja čvorova i preciznosti metoda. Metoda konačnih razlika ima 225 tisuća čvorova, dok neka od korištenih metoda konačnih elemenata ima najviše oko 200. Iz rezultata na slici metoda konačnih elemenata ima veliku prednost. Primjerice, korištenje pločastih elemenata treba i do 10 000 čvorova manje za jednaku preciznost kao i metoda konačnih razlika. Kao što je navedeno u trećem poglavlju, o konačnim razlikama, ta je metoda konzistentna te uz sve veći broj čvorova, odnosno manji

interval između njih, uniformno konvergira točnom rješenju pa je očekivan rezultat prikazan na slici 5.1. Za razliku od nje, metoda konačnih elemenata ne mora monotono konvergirati što ovisi o tipu elementa i broju čvorova po konačnom elementu. Ovo je povezano s korištenim interpolacijskim funkcijama i zahtjevom za glatko rješenje.

## 6. ZAKLJUČAK

Rješenje biharmonijske jednadžbe prikazane u radu dobiveno je analitički, pomoću Fourierovih redova, te pomoću dvije numeričke metode, konačnih razlika i konačnih elemenata. Rezultat dobiven analitički uzet je kao referentan u usporedbi s rješenjima dobivenima numerički. Rezultati su dodatno uspoređeni s rezultatom dobivenim u komercijalnom softveru i tabličnim rezultatom iz Inženjerskog priručnika. Iako se svi rezultati poklapaju, postoje određena odstupanja u preciznosti. Osim toga, postoje i razlike u robusnosti numeričkih metoda. Metoda konačnih razlika treba puno više čvorova po mreži da bi ostvarila jednaku preciznost. Za drugačiju geometriju potreban je potpuno novi algoritam. Za istu mrežu, pri rješavanju metodom konačnih elemenata, može se dodijeliti *sofisticiraniji* element i dobiti će se nekoliko redova veličine preciznije rješenje, bez da to znatno poskupljuje numerički proračun. Metoda konačnih elemenata zbog toga je robusna i napisan algoritam za metodu konačnih elemenata bi i s drugačijom zadanom geometrijom također dao precizan rezultat.

Metoda konačnih razlika prikladnija je za korištenje u akademske svrhe i za jednostavnije domene računanja, a široku primjenu nalazi u nestacionarnim problemima. Njezina matematička teorija vrlo je jednostavna, metoda je konzistentna, ali je vrlo složena za implementiranje ako se traži dobivanje viših redova točnosti i zadane su nepravilne geometrije. Njezino odstupanje od točnog rješenja vrlo brzo postaje inženjerski zanemarivo, ali je još uvijek veće od metode konačnih elemenata s istim brojem čvorova.

Metoda konačnih elemenata ima znatno kompliciraniju matematičku teoriju, ali je zbog toga robusnija od metode konačnih razlika. Prema tome bih u području računalnih modeliranja i numeričkih rješavanja kompliciranih jednadžbi na proizvoljnim geometrijama dao prednost metodi konačnih elemenata. Treba napomenuti i da elementi čiji su dodatni stupnjevi slobode prve derivacije i zakreti poželjniji jer koriste mreže s manje čvorova, a daju preciznije rezultate i bržu konvergenciju.

## A. | Dodatak - algoritmi

### A.1. Analitičko rješenje pomoću Fourierovih redova

```
E=200000;  
ni=0.3;  
h=10;  
D=E*h^3/(12*(1-ni^2))  
syms j k a b q x y  
f=(16*q*(sin(pi*j/2))^2*(sin(pi*k/2))^2)/(j*k* ...  
...*((j/a)^2+(k/b)^2)^2)*sin(j*pi*x/a)*sin(k*pi*y/b)  
a=1000;  
b=500;  
q=0.01;  
  
x=a/2  
y=b/2  
  
ff=1/(pi^6*D)*f  
ff=subs(ff)  
  
K=0;  
for k=1:1  
    for j=1:1  
        K=K+subs(f);  
    end  
    k  
end  
w=1/(pi^6*D)*K
```



## A.2. Rješavanje biharmonijske jednačbe dvostrukim rješavanjem Poissonove jednačbe, shemom drugog reda točnosti

```
Lx=1000;
Ly=500;
Nx=50;
Ny=50;
hx=Lx/Nx;
hy=Ly/Ny;
N=Nx*Ny;
d=0;
bc1=d*ones(Nx+1,1);
bc2=d*ones(Ny+1,1);
bc3=d*ones(Nx+1,1);
bc4=d*ones(Ny+1,1);
q0=0.01;
ni=0.3;
E=200000;
h=10;
D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
q0=q0/D;
b=ones(N,1)*q0;
AA=sparse(zeros(1));
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        AA(a,a)=-2/hx^2 -2/hy^2;
        if jj~=1
            AA(a,a-1)=1/hy^2;
        end
        if jj==1
            b(a,1)=b(a,1)-bc3(ii)/hy^2;
        end;
    end
end
```

```
    if jj~=Ny
        AA(a,a+1)=1/hy^2;
    end
    if jj==Ny
        b(a,1)=b(a,1)-bc1(ii)/hy^2;
    end
    if ii~=1
        AA(a,a-Ny)=1/hx^2;
    end
    if ii==1
        b(a,1)=b(a,1)-bc4(jj)/hx^2;
    end
    if ii~=Nx
        AA(a,a+Ny)=1/hx^2;
    end
    if ii==Nx
        b(a,1)=b(a,1)-bc2(jj)/hx^2;
    end
end
end
plot(AA\b)
V=AA\ (AA\b);
plot(V)
%%
VV=zeros(Nx+2,Ny+2);
VV(1:end-1,1)=bc3;
VV(2:end,end)=bc1;
VV(1,2:end)=bc4;
VV(end,1:end-1)=bc2;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        VV(i+1,j+1)=V((i-1)*Ny+j);
    end
end
```

```
end
surf([1:Ny+2],[1:Nx+2],VV)
set(gca,'FontSize',16)
title('Progib elasticne ploce ')
xlabel('Duljina L_y')
ylabel('Duljina L_x')
zlabel('Progib w, mm')
```

### A.3. Rješavanje biharmonijske jednadžbe direktnom diskretizacijom biharmonijske jednadžbe, shemom drugog reda točnosti

```
Lx=1000;
Ly=500;
Nx=50 ;
Ny=50;
hx=Lx/Nx;
hy=Ly/Ny;
N=Nx*Ny;
d=0;
bc1=d*ones(Nx+1,1);
bc2=d*ones(Ny+1,1);
bc3=d*ones(Nx+1,1);
bc4=d*ones(Ny+1,1);
q0=0.01;
ni=0.3;
E=200000;
h=10;
D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
q0=q0/D;
b=ones(N,1)*q0;
Axx=sparse(zeros(1));
Ayy=Axx;
A=Ayy;
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        Axx(a,a)=6/hx^4;
        switch ii
            case 2
                Axx(a,a-Ny)=-4/hx^4;
                Axx(a,a+Ny)=-4/hx^4;
```

```

    Axx(a,a+2*Ny)=1/hx^4;
    b(a,1)=b(a,1)-bc4(jj)/hx^4;
    case 1
        Axx(a,a)=Axx(a,a)-1/hx^4;
        b(a,1)=b(a,1)+4*bc4(jj)/hx^4;
        Axx(a,a+Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a+2*Ny)=1/hx^4;
    case Nx-1
        Axx(a,a+Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a-Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a-2*Ny)=1/hx^4;
        b(a,1)=b(a,1)-bc2(jj)/hx^4;
    case Nx
        Axx(a,a)=Axx(a,a)-1/hx^4;
        Axx(a,a-Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a-2*Ny)=1/hx^4;
        b(a,1)=b(a,1)-4*bc2(jj)/hx^4;
    otherwise
        Axx(a,a-Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a+Ny)=-4/hx^4;
        Axx(a,a-2*Ny)=1/hx^4;
        Axx(a,a+2*Ny)=1/hx^4;
    end
end
end
%% derivacija po y
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        Ayy(a,a)=6/hy^4;
        switch jj
            case 1
                Ayy(a,a)=Ayy(a,a)-1/hy^4;

```

```

        b(a,1)=b(a,1)+4*bc3(ii)/hy^4;
        Ayy(a,a+1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a+2)=1/hy^4;
    case 2
        Ayy(a,a-1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a+1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a+2)=1/hy^4;
        b(a,1)=b(a,1)-bc3(ii)/hy^4;
    case Ny-1
        Ayy(a,a+1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a-1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a-2)=1/hy^4;
        b(a,1)=b(a,1)-bc1(ii)/hy^4;
    case Ny
        Ayy(a,a)=Ayy(a,a)-1/hy^4;
        Ayy(a,a-1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a-2)=1/hy^4;
        b(a,1)=b(a,1)+4*bc1(ii)/hy^4;
    otherwise
        Ayy(a,a-1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a+1)=-4/hy^4;
        Ayy(a,a-2)=1/hy^4;
        Ayy(a,a+2)=1/hy^4;
    end
end
end
end
%% derivacija dxdy
H=(hx*hy)^2;
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        A(a,a)=4/H;
        if ii==1

```

```
        b(a,1)=b(a,1)+2*bc4(jj);
    else
        A(a,a-Ny)=-2/H;
    end
    if ii==Nx
        b(a,1)=b(a,1)+2*bc2(jj);
    else
        A(a,a+Ny)=-2/H;
    end

        if jj==1
            b(a,1)=b(a,1)+2*bc3(ii);
        else
            A(a,a-1)=-2/H;
        end
        if jj==Ny
            b(a,1)=b(a,1)+2*bc1(ii)/H;
        else
            A(a,a+1)=-2/H;
        end
    end
    if ii==1
        if jj==1
            b(a,1)=b(a,1)-bc3(jj)/H;
            b(a,1)=b(a,1)-bc4(jj)/H;
        else
            b(a,1)=b(a,1)-bc4(jj)/H;
            b(a,1)=b(a,1)-bc4(jj)/H;
        end
    else
        switch jj
            case 1
                b(a,1)=b(a,1)-bc3(ii)/H;
                A(a,a-Ny+1)=1/H;
            case Ny
```

```

        b(a,1)=b(a,1)-bc1(ii)/H;
        A(a,a-Ny-1)=1/H;
    otherwise
        A(a,a-Ny+1)=1/H;
        A(a,a-Ny-1)=1/H;
    end
end
end

    if ii==Nx
        if jj==Ny
            b(a,1)=b(a,1)-bc2(jj)/H;
            b(a,1)=b(a,1)-bc1(jj)/H;
        else
            b(a,1)=b(a,1)-bc2(jj)/H;
            b(a,1)=b(a,1)-bc2(jj)/H;
        end
    else
        switch jj
            case 1
                b(a,1)=b(a,1)-bc3(ii)/H;
                A(a,a+Ny+1)=1/H;
            case Ny
                b(a,1)=b(a,1)-bc1(ii)/H;
                A(a,a+Ny-1)=1/H;
            otherwise
                A(a,a+Ny+1)=1/H;
                A(a,a+Ny-1)=1/H;
            end
        end
    end
end

end

end

%%
AA=Ayy+Ax x +2*A;
V =AA\b;

```



```
plot(V )
%%
VV=zeros (Nx+2,Ny+2) ;
VV(1:end-1,1)=bc3;
VV(2:end,end)=bc1;
VV(1,2:end)=bc4;
VV(end,1:end-1)=bc2;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        VV(i+1,j+1)=V((i-1)*Ny+j);
    end
end
surf([1:Ny+2],[1:Nx+2],VV)
set(gca,'FontSize',16)
title('Progib elasticne ploce ')
xlabel('Duljina L_y')
ylabel('Duljina L_x')
zlabel('Progib w, mm')
```

#### A.4. Rješavanje biharmonijske jednadžbe dvostrukim rješavanjem Poissonove jednadžbe, shemom četvrtog reda točnosti

```
Lx=1000;
Ly=500;
Nx=150;
Ny=150;
hx=Lx/Nx;      Hx=12*hx^2;
hy=Ly/Ny;      Hy=12*hy^2;
N=Nx*Ny;
d=0;
bc1=d*ones(Nx+1,1);
bc2=d*ones(Ny+1,1);
bc3=d*ones(Nx+1,1);
bc4=d*ones(Ny+1,1);
q0=0.01;
ni=0.3;
E=200000;
h=10;
D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
q0=q0/D;
b=ones(N,1)*q0*1;
b(floor(N/2))=0;
Axx=sparse(zeros(1));
Ayy=Axx;
A=Ayy;
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        Axx(a,a)=-30/Hx;
        switch ii
            case 1
                Axx(a,a)=Axx(a,a)+1/Hx;
```

```

        b(a,1)=b(a,1)-16*bc4(jj)/Hx;
        Axx(a,a+Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a+2*Ny)=-1/Hx;
    case 2
        Axx(a,a-Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a+Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a+2*Ny)=-1/Hx;
        b(a,1)=b(a,1)+bc4(jj)/Hx;
    case Nx-1
        Axx(a,a+Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a-Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a-2*Ny)=-1/Hx;
        b(a,1)=b(a,1)+bc2(jj)/Hx;
    case Nx
        Axx(a,a)=Axx(a,a)+1/Hx;
        Axx(a,a-Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a-2*Ny)=-1/Hx;
        b(a,1)=b(a,1)+16*bc2(jj)/Hx;
    otherwise
        Axx(a,a-Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a+Ny)=16/Hx;
        Axx(a,a-2*Ny)=-1/Hx;
        Axx(a,a+2*Ny)=-1/Hx;
    end
end
end
%% derivacija po y
for ii=1:Nx
    for jj=1:Ny
        a=(ii-1)*Ny+jj;
        Ayy(a,a)=-30/Hy;
        switch jj
            case 1

```

```

        Ayy(a,a)=Ayy(a,a)+1/Hy;
        b(a,1)=b(a,1)-16*bc3(ii)/Hy;
        Ayy(a,a+1)=16/Hy;
        Ayy(a,a+2)=-1/Hy;
    case 2
        Ayy(a,a-1)=16/Hy;
        Ayy(a,a+1)=16/Hy;
        Ayy(a,a+2)=-1/Hy;
        b(a,1)=b(a,1)+bc3(ii)/Hy;
    case Ny-1
        Ayy(a,a+1)=16/Hy;
        Ayy(a,a-1)=16/Hy;
        Ayy(a,a-2)=-1/Hy;
        b(a,1)=b(a,1)+bc1(ii)/Hy;
    case Ny
        Ayy(a,a)=Ayy(a,a)+1/Hy;
        Ayy(a,a-1)=16/Hy;
        Ayy(a,a-2)=-1/Hy;
        b(a,1)=b(a,1)-16*bc1(ii)/Hy;
    otherwise
        Ayy(a,a-1)=16/Hy;
        Ayy(a,a+1)=16/Hy;
        Ayy(a,a-2)=-1/Hy;
        Ayy(a,a+2)=-1/Hy;
    end
end
end
%%
AA=Ayy+Axx ;
V=AA\ (AA\b) ;
plot(V)
%%
VV=zeros(Nx+2,Ny+2) ;

```

```
VV(1:end-1,1)=bc3;
VV(2:end,end)=bc1;
VV(1,2:end)=bc4;
VV(end,1:end-1)=bc2;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        VV(i+1,j+1)=V((i-1)*Ny+j);
    end
end
surf([1:Ny+2],[1:Nx+2],VV)
set(gca,'FontSize',16)
title('Progib elasticne ploce ')
xlabel('Duljina L_y')
ylabel('Duljina L_x')
zlabel('Progib w, mm')
```

## A.5. Rješavanje Poissonove jednadžbe linearnim konačnim elementima

```

load rect200lin
p(q(1,:),:);
syms ksi eta
N(1)=1/4*(1-ksi)*(1-eta);
N(2)=1/4*(1+ksi)*(1-eta);
N(3)=1/4*(1+ksi)*(1+eta);
N(4)=1/4*(1-ksi)*(1+eta);
dNksi=diff(N,'ksi')
dNeta=diff(N,'eta')
%%
KKksi=[-0.9324695 -0.66120938 -0.238619186 0.238619186 0.66120938 0.9324695];
wi=[0.1713244923 0.360761573 0.4679139345 0.4679139345 0.360761573 0.1713244923];
q0=0.01;
ni=0.3;
E=200000;
h=10;
D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
q0=q0/D;
num=max(size(p))*1;
BS=ones(num,1)*q0;
w=sparse(0);
F=zeros(num,1);
for n=1:max(size(q))
pp=p(q(n,:),:);
pr=0;
for j=1:6
for i=1:6
x=KKksi(i);
y=KKksi(j);
pr=pr+wi(j)*wi(i)*bb(x,y,pp);

```

```
        i;
    end
    j;
end
bs=BS(q(n,:),1);
SF=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i);
        y=KKsi(j);
        SF=SF+double(wi(j)*wi(i)*source4lin(x,y,bs));
        double(SF);
    end
end
ww=sparse(zeros(num));
for i=1:size(pr)
    for j=1:size(pr)
        ww(q(n,i), q(n,j))=pr(i,j);
    end
    F(q(n,i),1)=F(q(n,i),1)+SF(i);
end
w=w+ww;
end
W=w;
bc=zeros(size(e));
% bc(1:21)=0.00001;
for i=1:length(e)
    F=F-w(:,i)*bc(i);
    w(e(i),:)=0;
    w(:,e(i))=0;
    w(e(i),e(i))=1;
    F(e(i))=bc(i);
end
```

```
efef= F;
V=w\F;
max(abs(V))
figure(1);
subplot(2,1,1)
plot(V)
%%
BS=V;
w=0;
F=zeros(num,1);
for n=1:max(size(q))
pp=p(q(n,:),:);
pr=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i);
        y=KKsi(j);
        pr=pr+wi(j)*wi(i)*bb(x,y,pp);
    i;
end
j;
end
bs=BS(q(n,:),1);
SF=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i);
        y=KKsi(j);
        SF=SF+double(wi(j)*wi(i)*source4lin(x,y,bs));
    double(SF);
end
end
ww=sparse(zeros(num));
```



```
    for i=1:size(pr)
        for j=1:size(pr)
            ww(q(n,i), q(n,j))=pr(i,j);
        end
        F(q(n,i),1)=F(q(n,i),1)+SF(i);
    end
    w=w+ww;
end
W=w;
bc=zeros(size(e));
bc(1:21)=0.001;
for i=1:length(e)
    F=F-w(:,i)*bc(i);
    w(e(i),:)=0;
    w(:,e(i))=0;
    w(e(i),e(i))=1;
    F(e(i))=bc(i);
end
efef= F;
V=w\F ;
vpa(max(abs(V)),16)
plot(V);
%%
i=1;
while (e(i+1)-e(i))==1
    Nx=i;
    i=i+1;
end
for j=1:num/Nx
    for i=1:Nx
        VV(j,i)=V((j-1)*Nx+i);
    end
end
end
```

```
%%  
surf([1:Ny],[1:Nx],VV');  
set(gca,'FontSize',16)  
title('Progib elasticne ploce ')  
xlabel('Duljina L_y')  
ylabel('Duljina L_x')  
zlabel('Progib w, mm')
```

## A.6. Rješavanje Poissonove jednadžbe pločastim konačnim elementima

```

load rect16lin.mat
syms ksi eta a b
ksi01=1/4*(2-3*ksi+ksi^3);
ksi11=a/4*(1-ksi-ksi^2+ksi^3);
ksi02=1/4*(2+3*ksi-ksi^3);
ksi12=a/4*(-1-ksi+ksi^2+ksi^3);
eta01=1/4*(2-3*eta+eta^3);
eta11=b/4*(1-eta-eta^2+eta^3);
eta02=1/4*(2+3*eta-eta^3);
eta12=b/4*(-1-eta+eta^2+eta^3);
N1=[ksi01*eta01 ksi11*eta01 ksi01*eta11 ksi11*eta11];
N2=[ksi02*eta01 ksi12*eta01 ksi02*eta11 ksi12*eta11];
N3=[ksi02*eta02 ksi12*eta02 ksi02*eta12 ksi12*eta12];
N4=[ksi01*eta02 ksi11*eta02 ksi01*eta12 ksi11*eta12];
N=[N1 N2 N3 N4];
%%
br=0;
b=0;
while b==0
    br=br+1;
    b=p(br,2)/2;
end
a=p(2,1)/2;
syms x y
ksi=x/a
eta=y/b
N=subs(N)
KKsi=[-0.9324695 -0.66120938 -0.238619186 0.238619186 0.66120938 0.9324695];
wi=[0.1713244923 0.360761573 0.4679139345 0.4679139345 0.360761573 0.1713244923];
%% num gauss

```

```
pr=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i)*a;
        y=KKsi(j)*b;
        pr=pr+wi(j)*wi(i)*n16xx(a,b,x,y);
        i;
    end
    j;
end
pr=double(pr)*a*b;
det(pr);
sparse(pr-pr');
dr=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i)*a;
        y=KKsi(j)*b;
        dr=dr+wi(j)*wi(i)*n16xy(a,b,x,y);
        i;
    end
    j;
end
dr=double(dr)*a*b;
det(dr);
sparse(dr-dr');
tr=0;
for j=1:6
    for i=1:6
        x=KKsi(i)*a;
        y=KKsi(j)*b;
        tr=tr+wi(j)*wi(i)*n16yy(a,b,x,y);
        i;
    end
end
```

```
        end
        j;
    end
    tr=double(tr)*a*b;
    det(tr);
    sparse(tr-tr');
    F=pr+2*dr+tr;
    K=double(F);
    det(K);
    sparse(K-K');
    SF=0;
    for j=1:6
        for i=1:6
            x=KKsi(i)*a;
            y=KKsi(j)*b;
            SF=SF+wi(j)*wi(i)*n16source(a,b,x,y);
            i;
        end
        j;
    end
    SF=double(SF)*a*b;
    q0=0.01*1;
    ni=0.3;
    E=200000;
    h=10;
    D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
    q0=q0/D;
    SF=SF*q0;
    %% odavde sve
    num=max(size(p))*4;
    w=sparse(zeros(num));
    F=0;
    for n=1:max(size(q))
```

```

    %w(1:num,1:num,n)=sparse(zeros(num));
    %w(:, :, n)=sparse(zeros(num));
    %w=sparse(w(:, :, n))
    ww=sparse(zeros(num));
    qq=q(n, :);
    p1=(qq(1)-1)*4+1;
    p2=(qq(2)-1)*4+1;
    p3=(qq(3)-1)*4+1;
    p4=(qq(4)-1)*4+1;
    qq=[p1 p1+1 p1+2 p1+3 p2 p2+1 p2+2 p2+3 p3 p3+1 p3+2 p3+3 p4 p4+1 p4+2 p4+3 p4+4];
    for i=1:size(K)
        for j=1:size(K)
            ww(qq(i), qq(j))=K(i, j);
        end
        F(qq(i), 1, n)=SF(i);
    end
    w=w+ww;
    n;
end
FF=0;
for n=1:max(size(q))
    %W=W+w(:, :, n);
    FF=FF+F(:, :, n);
end
W=w;
dl=(e-1)*4+1;
pn=(1:21)*4-1;
an=setdiff(1:length(FF(:, 1)), pn)
for A = 1:length(an)
    for P= 1:length(pn)
        Kaa(A, A)=W(an(A), an(A));
        Kap(A, P)=W(an(A), pn(P));
        Ra(A, 1)=FF(an(A));
    end
end

```

```
end
end
Vp=ones(length(pn),1)*2;
Vp=sin(linspace(-pi/2,pi/2,length(pn))');
Va=Kaa\ (Ra-Kap*Vp);
for i =1:length(an)
    V(an(i),1)=Va(i);
end
for i =1:length(pn)
    V(pn(i),1)=1;
end
efef=FF;
V=W \FF;
veee=V ;
vpa(max(abs(V)),15)
plot(V)
erstens=( [1:max(size(p)) ]-1)*4+1;
RR=ubac(V,dl);
erer=RR(erstens);
AA=0;
nx=ceil(( (1000/(2*a))+1));
ny=ceil((500/(2*b))+1);
AA=reshape(erer,nx,ny);
surf([1:ny],[1:nx],AA)
%%
set(gca,'FontSize',16)
title('Progib elasticne ploce ')
xlabel('Duljina L_y')
ylabel('Duljina L_x')
zlabel('Progib w, mm')
```

[0]

## Literatura

- [1] Ivo Alfrević. Linearna analiza konstrukcija. 2003.
- [2] M Arad, A Yakhot, and G Ben-Dor. A highly accurate numerical solution of a biharmonic equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 13(4):375–391, 1997.
- [3] Dassault Systemes: 3DS Paris Campus. Abaqus, abaqus documentation: Version 6.13. *10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay*, 2013.
- [4] Dassault Systemes: 3DS Paris Campus. Abaqus, abaqus software: Version 6.13. *10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay*, 2013.
- [5] Ivo Džijan. Računalna dinamika fluida. *Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb*, 2010.
- [6] DF Hawken, JJ Gottlieb, and JS Hansen. Review of some adaptive node-movement techniques in finite-element and finite-difference solutions of partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 95(2):254–302, 1991.
- [7] Brian T Helenbrook. Mesh deformation using the biharmonic operator. *International journal for numerical methods in engineering*, 56(7):1007–1021, 2003.
- [8] Stjepan Jecić and Damir Semenski. Jednadžbe teorije elastičnosti. 2001.
- [9] Tomo Jukić. Ip1 inženjerski priručnik, tisak grafički zavod hrvatske-zagreb, 1996. Technical report, ISBN 953-0-31662-3.
- [10] Mladen Jurak. Metoda konacnih elemenata. *Matematički odjel PMF-a, Zagreb*, 2004.
- [11] Andrei D Polyanin and Vladimir E Nazaikinskii. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. CRC press, 2016.
- [12] Francisco-Javier Sayas. A gentle introduction to the finite element method, 2008.



- [13] Jurica Sorić. *Metoda konačnih elemenata*. Golden marketing, 2004.
- [14] Jurica Sorić. *Uvod u numeričke metode u strojarstvu*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2009.

## **B. | Prilozi**

### **B.1. CD-R disk**